Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik

Diplomarbeit

Das Auswahlaxiom

Claudius Röhl

6. Oktober 2016

Betreuende Hochschullehrerin:

Frau Prof. Tatjana Eisner

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mathematiker sind gläubige Menschen. Nicht zwangsläufig in einem religiösen Sinne, aber im reinsten Sinn dessen, was glauben bedeutet: nicht mit Sicherheit wissen. Das überrascht vielleicht den einen oder anderen Nichtmathematiker, gilt doch die Mathematik gemeinhin als die reinste Form des mit Sicherheit Wissens; als die Mutter der absoluten Wahrheiten. Und doch *glauben* die Mathematiker an die Richtigkeit ihrer „zehn Gebote“: das Axiomensystem nach Zermelo-Fraenkel, kurz $\mathcal{ZFC}$. Der Mathematiker ist sich seines Glaubens meist auch bewusst, so dass es für ihn vom formalen Standpunkt auch kein Problem darstellen würde, an andere unbeweisbare und unwiderlegbare Entitäten wie z.B. *Gott* zu glauben - im Gegensatz zu manchen (dem Positivismus nahestehenden) Wissenschaftlern, die darin einen Widerspruch zu ihren ureigensten Prinzipien zu erkennen glauben.

Ein Axiom (aus dem griechischen $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ für „würdiger, anerkannter Satz“) ist eine unbeweisbare Aussage. Fast alle wichtigen Sätze der modernen Mathematik basieren auf den Annahmen von $\mathcal{ZFC}$ und so stringent mathematische Beweise auch geführt sein mögen, handelt es sich doch nicht um das Produzieren absoluter, sondern relativer Wahrheiten - relativ in Bezug auf $\mathcal{ZFC}$. Sollte sich also ein Axiom als in irgendeiner Weise falsch oder ungeeignet herausstellen, wäre das Kollabieren eines großen Teiles der Mathematik die Folge.

In $\mathcal{ZFC}$ ist das Auswahlaxiom eines der am häufigsten angezweifelten Axiome, was es so interessant in Hinblick auf das eben Gesagte macht. Es gibt auch Einwände gegen andere Teile von $\mathcal{ZFC}$, zum Beispiel wurde und wird die Existenz einer Menge mit unendlich vielen Elementen von einigen Mathematikern im Kern angezweifelt, mit dem Argument, dass es nicht eine einzige Entität in der physischen Welt gäbe, deren wie auch immer geartete Unendlichkeit man nachweisen könne[1].

So offensichtlich die Einwände gegen unendliche Mengen sind, so ungerechtfertigt scheint auf den ersten Blick die Kritik am Auswahlaxiom zu sein, wenn man mit unendlichen Mengen kein Problem hat. Tatsächlich wurde es oft ganz beiläufig schon lange bevor die Mengentheorie in fertig formalisierter Form vorlag benutzt, ohne dass dies als Problem angesehen wurde. Zu seiner Beachtung kam es erst, als Ernst Zermelo 1904 einen Beweis veröffentlichte, nach dem jede Menge wohlgeordnet werden könne (eine Wohlordnung ist eine totale Ordnung auf einer Menge, mit der Eigenschaft, dass jede Teilmenge der Menge ein Minimum besitze[2]). Nach der Veröffentlichung seines Beweises wurde selbiger von vielen Mathematikern seiner Zeit, darunter auch Größen wie Émile Borel, Henri Poincaré und Giuseppe Peano, stark kritisiert. Man konnte sich einfach nicht vorstellen, dass auf $\mathbb{R}$ eine Wohlordnung existieren solle. Daraufhin veröffentlichte Zermelo 1907 einen zweiten Beweis des Wohlordnungssatzes, in dessen Nachwort er (damals noch auf Deutsch) mit seinen Kritikern in schneidenden Sätzen abrechnete und ihre Bedenken zu zerstreuen suchte. *Einen* Zweifel konnte er jedoch nicht ausräumen: die Unbewiesenheit des damals sogenannten *Auswahlpostulats*, was er offen zugibt:

> „An erster Stelle stehen hier diejenigen Einwände, welche sich gegen das oben formulierte „Auswahlpostulat“ richten [...]. Ihnen kann ich insofern eine relative Berechtigung einräumen, als ich dieses Postulat, wie ich am Ende meiner Note ausdrücklich hervorhob, eben nicht beweisen und daher niemand apodiktisch zu seiner Anerkennung zwingen kann. Indem also die Herren E. Borel und G. Peano in ihren Kritiken den Mangel eines Beweises konstatierten, haben sie sich lediglich auf meinen eigenen Standpunkt gestellt. Sie hätten mich sogar zu Dank verpflichtet, wenn sie die von mir behauptete Unbeweisbarkeit, d.h.

[1] Ein prominenter Vertreter dieser als Finitismus bezeichneten Strömung war Leopold Kronecker (1839-1914).

[2] Die natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung sind dafür ein Beispiel, die reellen Zahlen mit der kanonischen Ordnung ein Gegenbeispiel, da z.B. die Menge $(0, 1)$ kein Minimum besitzt.

> die logische Unabhängigkeit dieses Postulates von den übrigen, nun ihrerseits bewiesen und damit meine Überzeugung bestätigt hätten. Nun ist Unbeweisbarkeit auch in der Mathematik bekanntlich keineswegs gleichbedeutend mit Ungültigkeit, da doch eben nicht alles bewiesen werden kann, sondern jeder Beweis wieder unbewiesene Prinzipien voraussetzt. Um also ein solches Grundprinzip zu verwerfen, hätte man seine Ungültigkeit in besonderen Fällen oder widersprechende Konsequenzen feststellen müssen; aber hierzu hat keiner meiner Gegner einen Versuch gemacht.“
>
> [Zer07, S. 111-112]

Da niemand bis dato beweisen konnte, dass dieses Prinzip nicht gilt und es sich auch nicht aus dem Axiomensystem Peanos (der nebenbei bemerkt noch interessanterweise auf Latein veröffentlichte) ableiten ließ, stellte sich Zermelo auf folgenden Standpunkt:

> „Solange nun die hier vorgelegten relativ einfachen Probleme den Hilfsmitteln Peanos unzugänglich bleiben, und solange andererseits das Auswahlprinzip nicht positiv widerlegt werden kann, wird man die Vertreter der produktiven Wissenschaft nicht hindern dürfen, sich dieser „Hypothese“, wie man es meinetwegen nennen möge, fernerhin zu bedienen und ihre Konsequenzen im weitesten Umfange zu entwickeln, zumal ja doch nur auf diesem Wege etwaige Widersprüche eines Standpunktes aufgedeckt werden können.“
>
> [Zer07, S. 115]

Genau das ist dann auch geschehen: viele Mathematiker haben sich nicht von der möglichen Zweifelhaftigkeit dieses Prinzips in ihrer Forschung stören lassen und es an allen Ecken und Enden der Mathematik zur Anwendung gebracht - ohne bis heute auf einen Widerspruch gestoßen zu sein. Vorausgesetzt, dass $\mathcal{ZF}$ widerspruchsfrei ist, wird das auch nie passieren, da die logische Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von $\mathcal{ZF}$ bereits bewiesen wurde, wie in Kapitel 4 noch genauer erläutert wird.

In dieser Arbeit möchte ich also dem Wesen des Auswahlaxioms auf den Grund gehen und verstehen, inwieweit es problematisch sein könnte, es zu benutzen, aber auch wie nützlich es ist, dieses mächtige Instrument als Mathematiker zu besitzen. Dazu werde ich im ersten Kapitel ein paar mengentheoretische Grundlagen legen. Der Abschnitt 1.1 ist der Zermelo-Fraenkel-Axiomatisierung der Mengenlehre gewidmet, in der das Auswahlaxiom eingebettet ist und die den äußeren Rahmen unserer Betrachtungen darstellt. Der Vollständigkeit halber werden in Abschnitt 1.2 einige alternative, zumeist schwächere Formen des Auswahlaxioms genannt, die im Weiteren nicht groß aufgegriffen werden. Der Abschnitt 1.3 behandelt die Mächtigkeit von Mengen, die die Grundlage für die restlichen Abschnitte in diesem Kapitel bilden. In 1.4 führen wir den Begriff der Ordinalzahl ein, was wiederum eine essentielle Grundlage für den nachfolgenden Abschnitt 1.5 bildet, der die transfinite Induktion und Rekursion behandelt. Insbesondere die Abschnitte 2.2, 2.3 und 2.7 benötigen die transfinite Induktion und Rekursion. Am Ende des ersten Kapitels definieren wir die Kardinalzahlen aufbauend auf den vorherigen Kapiteln, um insbesondere den Satz von König in 2.4 verstehen und beweisen zu können.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich ausführlich mit äquivalenten Formulierungen des Auswahlaxioms. Im Abschnitt 2.1 stelle ich ein paar für den weiteren Verlauf unerlässliche, recht einfache Äquivalenzen vor, die eher technischen Charakter haben. Die Wahl der anderen äquivalenten Darstellungen ist rein subjektiv, wobei ich versucht habe eine gute Mischung zwischen oft gebrauchten aber selten bewiesenen Äquivalenzen (wie das Lemma von Zorn in 2.2, den Wohlordnungssatz in 2.3 und den Satz von Tychonoff in 2.5), eher sporadisch anzutreffenden Sätzen (wie dem Satz von König in 2.4), bis hin zu nahezu unbekannten, exotischen Formulierungen, wie in 2.6 und 2.7, zu erreichen, und dabei zugleich möglichst unterschiedliche Bereiche der Mathematik abzudecken, wie Mengentheorie (2.2, 2.3, 2.4), Topologie in 2.5, Graphentheorie in 2.6 und Funktionalanalysis in 2.7. Die mit Abstand aufwändigste Äquivalenz und ein Kernstück meiner Arbeit findet sich in diesem letzten Abschnitt, wobei hier besonders der Satz von Krein-Milman eine Rolle spielt.

Im dritten Kapitel konzentriere ich mich auf merkwürdige Konsequenzen des Auswahlaxioms, die (zu entkräftende) Argumente gegen die Benutzung desselben bereitstellen. Man könnte auch den Abschnitt 2.3 dazu zählen, da der Wohlordnungssatz im Allgemeinen auch als kontraintuitiv empfunden wird. Dazu führe ich in 3.1 das Paradoxon von Banach-Tarski aus, wobei ich nicht den üblichen Weg beschreite, sondern unter Zuhilfenahme des Konzepts der Zerlegungsäquivalenz einen alternativen Zugang wähle, der ohne Angabe einer konkreten Zerlegung der Einheitskugel auskommt. Ein paar Anmerkungen zum leichten und schweren Maßproblem runden 3.1 ab. Im Abschnitt 3.2 habe ich unter Zuhilfenahme einer kleinen Geschichte einen Anschlag auf die Intuition des Lesers vor.

Im letzten Kapitel schließlich will ich auf einige „abgeschwächte“ Formen des Auswahlaxioms eingehen und ihre Zusammenhänge untereinander etwas beleuchten. Abschnitt 4.1 ist einer eher seltenen Formulierung des Satzes von Hahn-Banach gewidmet, wohingegen 4.2 einen in der Literatur oft auftauchenden Referenzpunkt für Abschwächungen des Auswahlaxioms, den Booleschen Primidealsatz, näher beleuchtet. In 4.3 werde ich einen kleinen Exkurs in die Logik wagen und einige metamathematische Aspekte der Modelltheorie ansprechen, die als Ausblick verstanden werden können.

Um möglicher Verwirrung aus dem Weg zu gehen, gelte in der gesamten Arbeit folgende Konvention: Wenn A und B Aussagen sind, dann bedeute $A \implies B$, dass B aus A mit $\mathcal{ZF}$ folgt - also ausdrücklich *ohne* das Auswahlaxiom. Ebenso sei $B \impliedby A$ zu verstehen. Wird das Auswahlaxiom benutzt, mache ich das durch explizite Nennung oder die Verwendung des Symbols $\overset{\mathcal{AC}}{\Longrightarrow}$ kenntlich.

Kapitel 1

Einige Mengentheoretische Grundlagen

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“

David Hilbert, 1926

Das Auswahlaxiom ist eng mit der Mengenlehre verknüpft und mittlerweile fester Bestandteil von ihr[1]. Daher ist es sinnvoll den Kontext, aus dem es erwachsen ist, etwas näher unter die Lupe zu nehmen. Die genauere Beschäftigung mit der Mengenlehre hat auch angenehme Erleichterungen zur Folge: um z.B. den Wohlordnungssatz zu beweisen, können wir später auf eine Fülle von mengentheoretischen Konstrukten zurückgreifen, so dass der Beweis sehr elegant geführt werden kann. Wir werden auch in anderen Kapiteln von den nun eingeführten Instrumenten profitieren; insbesondere von der *transfiniten Induktion* und *transfiniten Rekursion.*

1.1 Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre Die nun folgende Definition der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre bildet die Grundlage der modernen Mathematik. Diese zehn Axiome stellen sozusagen „Glaubenssätze erster Ordnung“ dar, da sie zwar einleuchten, aber doch nicht bewiesen werden können und nahezu alle moderne Mathematik auf diese wenigen Grundannahmen zurückgeführt werden kann. Mit ihnen wird grob gesprochen entschieden, was Mengen sind und was Mengen können. Um dabei formal einwandfrei zu verfahren, müsste man noch tiefergehende Theorien ausheben, die sich mit Logik und deren Sprache beschäftigen, worauf wir hier aber verzichten möchten. Es soll uns reichen zu wissen, dass die hier eher metasprachlich definierten Axiome auch eine rigorose prädikatenlogische Formulierung besitzen. In [PD11] findet man eine kurze prägnante Einführung in formale Sprachen (S. 8-14) und formalisierte Mengenaxiome (S. 54-56). Eine rigorose Einführung findet man in [Jec78], woran wir uns im gesamten Kapitel auch immer grob orientieren werden.

Wir stellen uns ab jetzt auf den Standpunkt, dass alle mathematischen Objekte Mengen sind. Wie genau das vor sich geht, wird im Laufe dieses Kapitels deutlich. Dies hat unter anderem zur Folge, dass Mengen lediglich Mengen enthalten können, woraus sich z.B. die Zulässigkeit der Formulierung des Vereinigungsaxioms erklärt.

[1] Das obige Zitat steht auf der dritten Seite von Thomas Jechs Standardwerk zur Mengentheorie. Auch wenn jemand mal in der Bibliotheksausgabe „*you will soon see that it is not a paradise and leave it on your own*“ darunterschrieb, ist die Mengentheorie doch ein faszinierendes, universelles mathematisches Gebiet, das nicht nur Hilbert in seinen Bann zog.

Definition 1.1.1 (Die Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre[2])

1. **Extensionalitätsaxiom.** Wenn X und Y die gleichen Elemente haben, dann gilt $X = Y$.
2. **Paarmengenaxiom.** Für a, b existiert die Menge $\{a, b\}$, die genau a und b beinhaltet.
3. **Aussonderungsaxiomenschema.**[3] Für jedes einstellige Prädikat[4] $f(x)$ gilt: Für jede Menge M gibt es eine Teilmenge $N \subseteq M$ so, dass $N = \{m \mid f(m)\}$ ist; N enthält also genau diejenigen Elemente aus M, die das Prädikat $f(x)$ wahr werden lassen.
4. **Vereinigungsaxiom.** Für jede Menge A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente der Menge A enthält. Man schreibt für B auch $\bigcup A$[5].
5. **Potenzmengenaxiom.** Für jede Teilmenge A existiert eine Menge $\mathcal{P}(A)$, die genau die Teilmengen von A enthält.
6. **Leermengenaxiom.** Es gibt eine Menge $\emptyset$, die keine Elemente enthält.
7. **Unendlichkeitsaxiom.** Es gibt induktive Mengen. Ein Menge $\mathcal{X}$ heißt induktiv, wenn gilt, dass sie die leere Menge enthält und dass für jedes $y \in \mathcal{X}$ auch $y \cup \{y\} \in \mathcal{X}$ ist[6].
8. **Ersetzungsaxiomenschema.** Wenn F eine Funktion auf einer Menge X ist, so ist $Y = F(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$ eine Menge.
9. **Fundierungsaxiom.** Jede nichtleere Menge M enthält ein Element C, das zu M disjunkt ist[7].
10. **Auswahlaxiom.** Zu jeder Menge M gibt es eine Auswahlfunktion, also eine Abbildung $f : M \to \bigcup M$, so dass $\forall m \in M : f(m) \in m$.

Folgerung 1.1.2 Es gibt keine bezüglich $\in$ unendlich absteigenden Ketten von Mengen, d.h. es gibt keine Mengen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$M_1 \ni M_2 \ni M_3 \ni \dots \quad .$$

Beweis. Angenommen, es gäbe solche Mengen. Dann ist auch $M := \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit dem Ersetzungsaxiom eine Menge (da die natürlichen Zahlen eine Menge sind). Dann gibt es nach dem Fundierungsaxiom ein Element $C \in M$ so, dass $C \cap M = \emptyset$ gilt. Nun gibt es also ein $n \in \mathbb{N} : C = M_n$. Es ist $M_{n+1} \in M_n = C$ und $M_{n+1} \in M$, was auf $M_{n+1} \in C \cap M \neq \emptyset$ führt, ein Widerspruch. □

Folgerung 1.1.3 Keine Menge enthält sich selbst.

Beweis. Wir geben hier zwei Beweise.

1. Angenommen, es gäbe eine Menge x, die sich selbst enthält. Dann ist mit dem Paarmengenaxiom auch $\{x, x\} = \{x\}$ eine Menge. Mit dem Fundierungsaxiom gibt es nun ein $C \in \{x\}$ mit $C \cap \{x\} = \emptyset$. Es ist also $C = x$. Also folgt $x \cap \{x\} = \emptyset$, ein Widerspruch, da $x \in x$ gilt.
2. Folgt sofort aus vorheriger Folgerung, da wir dann eine unendliche absteigende Kette

$$x \ni x \ni x \ni \dots$$

hätten. □

[2] Wir folgen hier der Darstellung aus Jec78, S.1.

[3] *Schema* deshalb, weil hier eigentlich unendlich viele Axiome definiert werden: für jedes Prädikat eines.

[4] also eine Abbildung von der Klasse aller Menge in die Menge der Wahrheitswerte {wahr, falsch}.

[5] So kann man z.B. die „klassische“ Vereinigung definieren durch $A \cup B := \bigcup\{A, B\}$.

[6] Dabei handelt es sich um Mengen, die sich so ähnlich wie die „normalen“ natürlichen Zahlen verhalten. Wir kommen später noch darauf zu sprechen.

[7] Dieses Axiom war erst nicht Teil des ursprünglichen Axiomensystems von E. Zermelo (siehe dazu [Zer08, S.]) Es hat dann wenig später Eingang gefunden, weil der Verzicht darauf zu Widersprüchen wie z.B. der Russellschen Mengenantinomie ($\{x \mid x \notin x\}$ ist keine Menge) führt.

Bemerkung 1.1.4 Das Ziel, das man bei der Entwicklung der Mengenlehre verfolgt, ist auch immer die Erfüllung eines gewissen Universalisierungsanspruches, nach dem Motto „Alles ist Menge“[8]. Konkret heißt dies, dass man bestrebt ist, die gesamte Sprache der Mathematik in die Sprache der Mengenlehre zu überführen (z.B. Funktionen werden zu Relationen, ergo Mengen) und sie damit zum größten gemeinsamen Nenner aller Bereiche der Mathematik zu machen, wie es die Autorengruppe von Bourbaki[9] versuchte. Diese Grundeinstellung hat sich zwar weitgehend durchgesetzt, den meisten Mathematikern genügt es dabei jedoch zu wissen, dass es *möglich* wäre, die von ihnen benutzten Konzepte in der Sprache von $\mathcal{ZFC}$ zu formulieren - und kümmern sich um die „eigentlichen“ Probleme. Im Folgenden werden wir beispielhaft einige dieser Umformulierungen bekannter Konzepte in die Sprache der Mengenlehre vorstellen.

Definition 1.1.5 (Tupel in Mengenschreibweise)[10]
Seien A, B Mengen. Definiere
$$(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}.$$
Setze wie üblich
$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Beispiel 1.1.6 Mit der obigen Definition der Tupel gilt für beliebige Mengen A, B folgende Behauptung[11]:
$$\{\emptyset\} \times A \notin \{\emptyset\} \times B.$$

Beweis. Wäre es nicht so, gäbe es ein $b \in B$ mit $\{\emptyset\} \times A = (\emptyset, b) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, b\}\}$. Also ist $|\{\emptyset\} \times A| \in \{1, 2\}$ (für $A = \emptyset$ gilt die Behauptung trivialerweise, da $\emptyset \notin \emptyset$ und $\emptyset \notin (\emptyset, b) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, b\}\}$ ist).

Falls $|\{\emptyset\} \times A| = 1$ gilt, haben wir $A = \{a\}$ und es muss auch $|(\emptyset, b)| = 1$ sein. Daher muss $b = \emptyset$ gelten und wir haben
$$\{\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, a\}\}\} = \{(\emptyset, a)\} = \{\emptyset\} \times A = (\emptyset, b) = (\emptyset, \emptyset) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\},$$
ein Widerspruch, selbst für $a = \emptyset$.

Also muss $|\{\emptyset\} \times A| = 2 = |(\emptyset, b)|$ sein. Sei $A = \{a_1, a_2\}$ mit $a_1 \neq a_2$. Wir haben
$$\{(\emptyset, a_1), (\emptyset, a_2)\} = \{\emptyset\} \times A = (\emptyset, b) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, b\}\}.$$
Also ist $b \neq \emptyset$ und es ergibt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit
$$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, a_1\}\} = (\emptyset, a_1) = \{\emptyset\},$$
ein Widerspruch. □

Definition 1.1.7 (Relation)
Eine **Relation** R *auf* einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M := \{(m, n) \mid m, n \in M\}$.
Wir nennen für zwei Mengen A und B eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ ebenfalls Relation von A nach B[12].

Definition 1.1.8 (Abbildung)
Eine **Abbildung** $f : A \to B$ ist eine Relation von A nach B so, dass
$$\begin{aligned} \forall a \in A\ \exists b \in B &\quad : \quad (a, b) \in f, \\ \forall a \in A\ \forall b, c \in B &\quad : \quad (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c. \end{aligned}$$

[8] Ein Leitspruch, der ein wenig an den Grundsatz „Alles ist Zahl“ der antiken Pythagoräer erinnert.
[9] *Nicolas Bourbaki* ist das Pseudonym eines Autorenkollektivs aus Frankreich, das seit 1934 in wechselnder Besetzung daran arbeitete, die Mathematik streng axiomatisch aufzubauen, basierend auf der Mengenlehre.
[10] Diese Darstellung geht auf den polnischen Mathematiker Kazimierz Kuratowski (1896-1980) zurück.
[11] Diese Eigenschaft kann nützlich sein, wenn man ausgehend von gegebenen Mengen A, B Mengen erzeugen möchte, die sich definitiv nicht enthalten, ohne die wesentliche Struktur von A, B zu zerstören. Es lassen sich Gegenbeispiele für Verallgemeinerungen wie z.B. „$A \times B \notin C \times D$“ angeben. Überraschenderweise gilt bereits $A \times \{\emptyset\} \notin B \times \{\emptyset\}$ nicht mehr (Nimm $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, B = \{\{\emptyset\}\}$).
[12] Das widerspricht sich nicht mit der ersten Formulierung, denn es ist $R \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$ und schon fällt R auch unter die erste Formulierung.

Wir bezeichnen A als **Definitionsbereich** von f und schreiben $\mathrm{dom}\,(f)$ für A. Wenn $(a,b) \in f$ ist, so schreiben wir auch $f(a)$, um b anzugeben.

Definition 1.1.9 (Natürliche Zahlen)
Wir nennen n eine **natürliche Zahl**, wenn n jeder induktiven Menge angehört[13]. Sei X eine beliebige induktive Menge. Wir definieren

$$\omega := \{x \in X \mid x \text{ ist natürliche Zahl}\}.$$

Weiterhin legen wir fest:[14]

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset, \\ 1 &:= \{\emptyset\}, \\ 2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ &\;\;... \\ n+1 &:= n \cup \{n\} = \{0,1,2,...,n\}. \end{aligned}$$

Wir nennen die Menge ω die **Menge der natürlichen Zahlen**[15] oder John-von-Neumann-Zahlen und schreiben auch $\mathbb{N}$ dafür.

Bemerkung 1.1.10 (Wohldefiniertheit von ω)
Die Menge ω ist wohldefiniert. Die Existenz von X folgt aus dem Unendlichkeitsaxiom und die Eindeutigkeit folgt aus dem Aussonderungsaxiom, da „ist natürliche Zahl“ ein Prädikat definiert. Aufgrund der Definition der natürlichen Zahl ist ω unabhängig von der Wahl von X.

Der folgende Satz zeigt, dass man für endliche Mengen kein Auswahlaxiom braucht, es genügt schon $\mathcal{ZF}$:

Satz 1.1.11 (endliche Auswahl)
Sei M eine nichtleere endliche Menge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Auswahlfunktion f auf M.

Beweis. Wir definieren $M_0 := M$. Da M_0 nichtleer ist, kann man das Fundierungsaxiom auf M_0 anwenden, das uns die Existenz eines Elements $C_0 \in M_0$ liefert, für das gilt: $C_0 \cap M_0 = \emptyset$. Uns interessiert nur, dass wir ein konkretes $C_0 \in M_0$ bekommen. Wir definieren jetzt $M_1 := M_0 \backslash \{C_0\}$. Wenn M_1 nichtleer ist, können wir wieder ein $C_1 \in M_1$ finden und so weiter, bis schließlich M_n die letzte nichtleere Menge in dieser entstehenden absteigenden Kette

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_n = \{C_n\}$$

ist. Wir können den Elementen von M_0 also eine Indexierung $M_0 = \{C_0, C_1, C_2, ..., C_n\}$ zuweisen. Weiterhin ist $C_j \neq \emptyset \; \forall j \in \mathbb{N}_{0,n}$. Daher finden wir wieder mit dem Fundierungsaxiom für jedes $j \in \mathbb{N}_{0,n}$ ein $c_j \in C_j$. Nun können wir eine Auswahlfunktion f auf M_0 definieren, gemäß

$$f(C_j) = c_j \; \forall j \in \mathbb{N}_{0,j}$$

und wir sind fertig. □

1.2 Alternative Formen des Auswahlaxioms

Es gibt eine ganze Reihe von echt schwächeren Versionen des Auswahlaxioms, wovon wir hier der Vollständigkeit halber einige nennen wollen. Sie lassen sich allesamt aus dem Auswahlaxiom herleiten, wobei die Umkehrung nicht gilt.

[13] Siehe Unendlichkeitsaxiom.

[14] Wir setzen hier metasprachlich die natürlichen Zahlen mit ihren Grundoperationen $+$ und $-$ als bekannt voraus, um die Notation angenehmer zu gestalten. Welchen mengentheoretischen Operationen $+$ und $-$ in diesem Zusammenhang entsprechen, soll nicht Teil dieser Arbeit sein, ist aber, aufbauend auf $n+1 := n \cup \{n\}$, ohne Weiteres möglich auszuführen.

[15] Um die mengentheoretische Charakterisierung der natürlichen Zahlen hervorzuheben, benutzen wir im Weiteren das Symbol ω dafür; wenn es uns nicht darauf ankommt, benutzen wir eher $\mathbb{N}$. Letztendlich sind aber beide Symbole für uns bedeutungsgleich.

Definition 1.2.1 (Abzählbares Auswahlaxiom)
Sei A eine abzählbare Menge von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Auswahlfunktion

$$f : A \to \bigcup A$$

mit $f(a) \in a$ für alle $a \in A$.

Wir werden die abzählbare Auswahl mit $\mathcal{CC}$ (Countable Choice) abkürzen.

Bemerkung 1.2.2 Es lässt sich zeigen, dass auch $\mathcal{CC}$ unabhängig von $\mathcal{ZF}$ ist, also nicht aus den Axiomen von $\mathcal{ZF}$ gefolgert werden kann.

Definition 1.2.3 (Beschränktes Auswahlaxiom)
Sei A eine beliebige Menge und $R \subseteq A \times A$ eine linkstotale Relation, d.h. $\forall a \in A\ \exists b \in A : (a, b) \in R$. Dann gibt es eine unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a_n, a_{n+1}) \in R.$$

Die beschränkte Auswahl wird mit $\mathcal{DC}$ (Dependent Choice) abgekürzt.

Bemerkung 1.2.4 Auch $\mathcal{DC}$ ist unabhängig von $\mathcal{ZF}$. Es lässt sich außerdem zeigen (siehe dazu [Jec78] S. 42), dass $\mathcal{DC}$ echt stärker als $\mathcal{CC}$ ist, d.h. dass gilt

$$\mathcal{DC} \overset{\mathcal{ZF}}{\Longrightarrow} \mathcal{CC} \ \wedge\ \neg(\mathcal{DC} \overset{\mathcal{ZF}}{\Longleftarrow} \mathcal{CC}).$$

Mit solchen logischen Fragestellungen werden wir uns in Abschnitt 4.3 noch genauer beschäftigen.

1.3 Mächtigkeit von Mengen

In diesem Kapitel führen wir Instrumente ein, die eine grobe Beurteilung der „Größe“ einer Menge erlauben. Diese Darstellung beruht im Groben immer noch auf dem nunmehr über hundert Jahre alten Ansatz vom Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor.

Definition 1.3.1 (Gleichmächtigkeit[16])
Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Wir schreiben in diesem Fall

$$|A| = |B|.$$

Wir nennen B **größergleichmächtig** A, wenn es eine Injektion von A nach B gibt und schreiben dann

$$|A| \leq |B|.$$

Wenn es darüber hinaus keine Bijektion zwischen A und B gibt, nennen wir B **mächtiger** als A und schreiben

$$|A| < |B|.$$

Bemerkung 1.3.2 Warum haben wir „$\leq$“ mit Injektionen definiert? Hätte man nicht dasselbe Ergebnis erhalten, wenn wir

$$|A| \leq |B| \ :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow}\ \exists f : B \to A \text{ surjektiv}$$

definiert hätten? Wenn wir uns in $\mathcal{ZFC}$ bewegen lautet die Antwort ja, wie man leicht zeigen kann. Wenn wir hingegen auf das Auswahlaxiom verzichten, gilt lediglich die Implikation

$$\exists f : A \to B \text{ injektiv} \Longrightarrow \exists f : B \to A \text{ surjektiv};$$

daher ist die von uns gewählte Definition ein wenig stärker, da sie die Alternativvariante in jedem Fall (mit oder ohne $\mathcal{AC}$) einschließt.

[16] siehe hierzu auch [Can95], 481-482.

Lemma 1.3.3 Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:[17]

1. $|(A^B)^C| = |A^{B\times C}|$.

2. $|A^B| = |(A')^{B'}|$, falls $|A| = |A'|$ und $|B| = |B'|$ gilt.

3. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$, falls $|A| = |A'|$ ist.

Beweis. 1. Definiere eine Abbildung $\phi : (A^B)^C \to A^{(B\times C)}$ gemäß

$$\forall g \in (A^B)^C \ \forall b \in B \ \forall c \in C : \phi(g)((b,c)) := (g(c))(b).$$

Diese Abbildung ist surjektiv. Sei dazu $f \in A^{(B\times C)}$. Definiere $g \in (A^B)^C$ durch

$$\forall b \in B \ \forall c \in C : (g(c))(b) := f((b,c)).$$

Dann gilt

$$\forall b \in B \ \forall c \in C : \phi(g)((b,c)) = (g(c))(b) = f((b,c)).$$

Bleibt noch die Injektivität zu zeigen.

Gelte $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ für $g_1, g_2 \in (A^B)^C$. Dann gilt $\forall b \in B \ c \in C$:

$$\begin{array}{ccc} \phi(g_1)((b,c)) & = & \phi(g_2)((b,c)) \\ \| & & \| \\ (g_1(c))(b) & & (g_2(c))(b). \end{array}$$

Also ist $g_1 = g_2$ und wir haben die Bijektivität von ϕ gezeigt.

2. Seien Bijektionen $\phi : A \to A',\ \psi : B \to B'$ gegeben. Definiere $\alpha : A^B \to A'^{B'}$ gemäß

$$(\alpha(f))(b') := \phi(f(\psi^{-1}(b'))) \ \forall f \in A^B \ \forall b' \in B'.$$

Diese Abbildung ist surjektiv, denn wenn $g \in A'^{B'}$ gegeben ist, dann setze $f(b) := \phi^{-1}(g(\psi(b)))$ und damit haben wir

$$(\alpha(f))(b') := \phi(f(\psi^{-1}(b'))) = \phi(\phi^{-1}(g(\psi(\psi^{-1}(b'))))) = \phi(\phi^{-1}(g(b'))) = g(b').$$

Außerdem ist α injektiv, denn wenn $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, dann haben wir $\forall b \in B$:

$$\begin{aligned} f_1(b) &= \phi^{-1}\phi(f_1(\psi^{-1}(\psi(b)))) = \phi^{-1}\alpha(f_1)(\psi(b)) \\ &= \phi^{-1}\alpha(f_2)(\psi(b)) = \phi^{-1}\phi(f_2(\psi^{-1}(\psi(b)))) \\ &= f_2(b). \end{aligned}$$

Damit ist also $|A^B| = |A'^{B'}|$.

3. Dies kann man als Spezialfall von 2. auffassen, da wir wissen, dass $|\mathcal{P}(A)| = |2^A| = |\{0,1\}^A|$ gilt. Setze also in 2. für A die Menge $\{0,1\}$ ein und die Behauptung folgt sofort. $\square$

Durch den folgenden Satz erhalten wir eine Art Antisymmetrie der Mächtigkeit.

Satz 1.3.4 (Cantor-Bernstein)[18]
Seien X, Y Mengen. Dann gilt:

$$|X| \leq |Y| \ \wedge \ |Y| \leq |X| \Longrightarrow |X| = |Y|.$$

[17] $A^B := \{f : B \to \ A\}$.
[18] Jec78, S. 24.

Beweis. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Injektionen. Dann gilt $|f(X)| = |X|$, $|g(Y)| = |Y|$ und

$$|g(f(X))| = |f(X)| = |X|.$$

Außerdem haben wir

$$g(f(X)) \subseteq g(Y) \subseteq X.$$

Wenn es uns also für beliebige Mengen A, B, C gelingt zu zeigen, dass

$$(C \subseteq B \subseteq A) \ \wedge \ |A| = |C| \implies |A| = |B| = |C|$$

gilt, sind wir fertig.

Sei hierzu $\phi : A \to C$ eine Bijektion. Wir wollen $\psi : A \to B$ bijektiv finden. Falls $A = B$ gilt, sind wir fertig. Gelte nun $B \subsetneq A$. Sei $D := A \backslash B$.

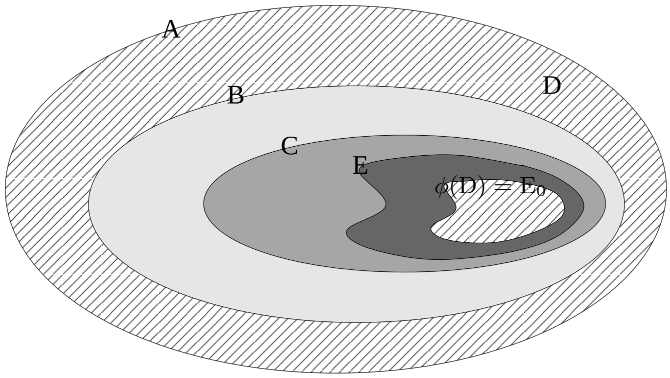

Abbildung 1.1: Skizze zu Cantor-Bernstein

Definiere rekursiv:

$$\begin{aligned} E_0 &:= \quad \phi(D), \\ E_{n+1} &:= \quad \phi(E_n), \\ E &:= \quad \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n. \end{aligned}$$

Setze nun

$$\psi(a) := \begin{cases} a & \text{falls } a \in B\backslash E, \\ \phi(a) & \text{falls } a \in D \cup E. \end{cases}$$

Die Funktion ψ ist Surjektiv. Sei $b \in B$. Falls

- $b \in B\backslash E$, dann ist $\psi(b) = b$.
- $b \in E_0 = \phi(D)$, dann gibt es wegen der Bijektivität von ϕ genau ein $a \in A$ so, dass $\psi(a) = \phi(a) = b$ gilt.
- $b \in E\backslash E_0$, dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b \in E_n = \phi(E_{n-1})$, also gibt es wieder wegen der Bijektivität von ϕ genau ein $a \in E_{n-1}$ so, dass $\psi(a) = \phi(a) = b$ ist.

Zur Injektivität von ψ stellen wir zunächst fest, dass

$$\psi = Id|_{B\backslash E} \ \cup \ \phi|_{D\cup E}$$

gilt[19]. Offensichtlich ist $Id|_{B\backslash E}$ injektiv. Da ϕ selbst schon injektiv ist, ist es insbesondere auch $\phi|_{D\cup E}$.

[19] Wir fassen Funktionen als Relationen auf.

Da die Bildmengen von $Id|_{B\setminus E}$ und $\phi|_{D\cup E}$ disjunkt sind ($\phi(D \cup E) \subseteq D \cup E$), ist ψ injektiv und insgesamt also bijektiv. Damit haben wir gezeigt, dass $|A| = |B| = |C|$ gilt. $\square$

Beispiel 1.3.5 Wir wollen nun einige Gleichmächtigkeiten unter Zuhilfenahme des eben bewiesenen Satzes zeigen.

1. $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$[20].

2. $|\mathbb{R}| = |C(\mathbb{R})| = |\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}|$.

Beweis. 1. $|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$: Betrachte die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}),\ \psi(r) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, ist diese Abbildung injektiv. Daher ergibt sich mit 1.3.3 und $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$:

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|.$$

$|\mathbb{R}| \geq |2^{\mathbb{N}}|$: Definiere $\psi : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\psi(\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(n)}{10^n}.$$

Diese Funktion ist wegen der Eindeutigkeit dieser konkreten Dezimalbruchentwicklung injektiv (da keine „9“ auftritt, gibt es keine Probleme) und wir erhalten $|\mathbb{R}| \geq |2^{\mathbb{N}}|$. Damit und mit Cantor-Bernstein (1.3.4) sind wir fertig.

2. $|\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R})|$: Definiere einfach $\phi(r) := f_r$, wobei f_r jene konstante Funktion sei, die überall r ist. $|\mathbb{R}| \geq |C(\mathbb{R})|$: mit 1.3.3 und $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ erhalten wir

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| \overset{(1)}{=} |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| \overset{(1)}{=} |\mathbb{R}|.$$

Definiere $\phi : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ gemäß

$$\phi(f) := f|_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}.$$

Diese Abbildung ist injektiv. Wäre sie es nicht, gäbe es $f, g \in C(\mathbb{R}), f \neq g$, so dass $\phi(f) = \phi(g)$ wäre. Dann gibt es also ein $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ so, dass $f(a) \neq g(a)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i \in \mathbb{Q}$, die gegen a strebt. Da f und g stetig sind, gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i_0 \leq i$ gilt:

$$\phi(f)(a_i) = f(a_i) \neq g(a_i) = \phi(f)(a_i),$$

was $\phi(f) = \phi(g)$ widerspricht.

Also haben wir $|C(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$ gezeigt und erhalten insgesamt mit Cantor-Bernstein die Behauptung.

$\square$

Der folgende Satz garantiert uns beliebig große Mächtigkeiten von Mengen.

Satz 1.3.6 (Theorem von Cantor)
Sei A eine Menge. Dann gibt es keine surjektive Funktion

$$f : A \to \mathcal{P}(A)$$

und es gilt also

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

[20] In dem konkreten Fall ist mit 2 die Menge $\{0, 1\}$ gemeint, also ist $\mathcal{P}(A)$ isomorph zu 2^A.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine solche Funktion f. Betrachte die Menge

$$M := \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A).$$

Also gibt es wegen der Surjektivität von f ein $m \in A$ so, dass $f(m) = M$ gilt. Liegt m in M? Falls ja, so wäre $m \notin f(m) = M$ ↯. Also gilt $m \notin M$. Daher ist $m \in f(m) = M$ ↯. Damit kann es keine solche Funktion f geben und die Behauptung ist bewiesen. □

Bemerkung 1.3.7 Können wir nun einfache Repräsentanten von Mächtigkeiten erhalten, z.B. so etwas wie Äquivalenzklassen bezüglich der Gleichmächtigkeitsrelation?
Zwar ist die Mächtigkeit mit „=" und „≤" offensichtlich auf eine *gewisse*[21] Art transitiv, reflexiv und symmetrisch, aber Gleichmächtigkeit ist keine Äquivalenzrelation, da es nicht die Menge

$$P := \{(M, N) \mid M, N \text{ Mengen mit } |M| = |N|\}$$

gibt, wie wir gleich sehen werden. Daher können wir auch nicht einfach die Äquivalenzklassen bilden, um so auf eine einfache Weise Repräsentanten für alle Mächtigkeiten von Mengen zu erhalten. Bisher steht uns nur ein relativer Mächtigkeitsbegriff zu Verfügung. Um also einen „universellen" Mächtigkeitsbegriff zu definieren, braucht es ein anderes Konzept. Wie sich herausstellen wird, ist es dazu sinnvoll, die Eigenschaften der natürlichen Zahlen, eine sogenannte *Wohlordnung*[22] zu bilden, auf geordnete Mengen *beliebiger* Mächtigkeit zu übertragen.

Satz 1.3.8 Die Zusammenfassung[23] aller Mengen, die sogenannte „Allmenge" oder „Allklasse"

$$V := \{x \mid x = x\}^{24}$$

ist keine Menge.

Beweis. Wäre V eine Menge, so wäre mit dem Potenzmengenaxiom auch $\mathcal{P}(V)$ eine Menge. Da V alle Mengen enthält, gilt insbesondere $\mathcal{P}(V) \subseteq V$. Also erhalten wir mit der kanonischen Einbettung eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}(V)$ nach V und mit Bemerkung 1.3.2 ist damit auch die Existenz einer surjektiven Abbildung von V nach $\mathcal{P}(V)$ klar. Dies widerspricht aber dem Satz von Cantor! Also ist V keine Menge. □

Folgerung 1.3.9 Die Zusammenfassung

$$P := \{(M, N) \mid M, N \text{ Mengen mit } |M| = |N|\}$$

ist keine Menge.

Beweis. Wäre P eine Menge, so wäre nach dem Aussonderungsaxiomenschema auch

$$\tilde{V} := \{(v, v) \in P \mid v \text{ ist Menge}\}$$

eine Menge. Dann ist mit dem Vereinigungsaxiom auch

$$\tilde{\tilde{V}} := \bigcup \tilde{V} = \bigcup_{v \text{ ist Menge}} \{\{v\}\}$$

eine Menge (siehe Definition 1.1.5). Wir können nun eine Auswahlfunktion f auf $\tilde{\tilde{V}}$ definieren; da jedes Element der Menge wiederum nur ein Element enthält, geht dies auch ohne Auswahlaxiom. Mit dem Ersetzungsaxiom ist auch

$$\{f(x) \mid x \in \tilde{\tilde{V}}\} = V$$

[21] Eben weil es sich nicht um eine Relation, also eine Menge handelt, muss hier der klassische Transitivitätsbegriff geweitet werden.
[22] Siehe 1.4.1.
[23] Mit diesem metasprachlichen Begriff bezeichnen wir im Folgenden jede fragwürdige mengenähnliche Entität.
[24] Dies ist die übliche, wenngleich auch etwas sonderbar anmutende Schreibweise der Allklasse.

eine Menge, ein Widerspruch zum vorherigen Satz. □

Bemerkung 1.3.10 ($\mathcal{NBG}$-Mengenlehre)
Um die „Zusammenfassung“ V auf eine solidere Basis zu stellen, müssen wir kurz auf die sogenannten *Klassen* zu sprechen kommen. Wir haben gesehen, dass es Zusammenfassungen von Objekten gibt, die keine Mengen sind. Um das Arbeiten mit diesen Objekten unserer Anschauung axiomatisch zu begründen, hat man die Theorie der Klassen eingeführt, die eine echte Verallgemeinerung der $\mathcal{ZFC}$-Mengenlehre darstellt. Diese Erweiterung ist als die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre bekannt und wird mit $\mathcal{NBG}$ abgekürzt. Wir wollen eine kurze Erläuterung der zentralen Punkte der $\mathcal{NBG}$-Mengenlehre geben, dabei aber auf eine rigorose Axiomatisierung verzichten, sondern nur auf die für uns interessanten Details eingehen (für Weitergehendes siehe [Jec78], S.76).

Wenn $\varphi(x)$ eine Aussage ist, die von Mengen abhängt, also z.b. $\varphi(x) \equiv x \notin x$, dann ist

$$\{x \in V \mid \varphi(x)\}$$

eine *Klasse* in $\mathcal{NBG}$. Insbesondere können damit Zusammenfassungen behandelt werden, die keine Mengen mehr sind, wie z.B.

$$\{x \in V \mid x \notin x\}^{25}.$$

Diese Klasse ist identisch mit V (die wir in Zukunft Allklasse nennen werden), da das Fundierungsaxiom keine Mengen gestattet, die sich selbst enthalten. Solche Klassen, die keine Mengen mehr in $\mathcal{ZFC}$ sind, werden auch als *echte Klassen* bezeichnet. Das Entscheidende hierbei ist, dass Klassen nur Mengen als Elemente enthalten, niemals echte Klassen. In der $\mathcal{NBG}$-Mengenlehre werden also auch „normale“ Mengen als Klassen bezeichnet, wobei wir weiterhin von Mengen sprechen wollen, wenn eine Klasse nach $\mathcal{ZFC}$ eine Menge ist. Es wird auch weiterhin für uns von Interesse sein, echte Klassen von Mengen zu unterscheiden.

Eine nützliche Konsequenz aus einer dergestalt verallgemeinerten Mengenlehre ist, dass wir nun ohne Probleme Funktionen zwischen Klassen, insbesondere Funktionen $F : V \to V$ definieren können:

Definition 1.3.11 (Klassenprodukt)
Seien A, B Klassen. Dann definiere

$$A \times B := \{(a, b) \in V \mid a \in A, b \in B\}^{26}.$$

Definition 1.3.12 (Funktionen)
Seien A, B Klassen. Wir nennen eine Klasse $F \subseteq A \times B$ [27] eine Funktion , falls

$$\forall a \in A\ \exists! b \in B : (a, b) \in F.$$

Falls A eine echte Klasse ist, nennen wir F eine Klassenfunktion.

Derlei Verallgemeinerungen lassen sich zuhauf sinnvoll definieren. Wir werden im Weiteren auf offensichtliche Definitionen verzichten und naheliegenden Symbole (wie z.B. $\subseteq$) zugunsten einer besseren Lesbarkeit sowohl für Mengen als auch für Klassen verwenden.

[25] Dies ist die Formulierung der Russellsche Mengenantinomie („Sei M die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten. Enthält sich M selbst?“), die die damalige reine Mengenlehre in arge Schwierigkeiten gebracht hat. In $\mathcal{ZFC}$ existiert keine solcherart definierte Menge - in $\mathcal{NBG}$ lässt sich aber wieder damit arbeiten. Diese echte Klasse hat besonders Gottlob Frege zu schaffen gemacht, der erst nachdem sein Hauptwerk in Druck gegangen war, davon erfahren hat und resigniert im Nachwort seiner „Grundgesetze der Arithmetik“ 1903 vermerkte:
„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte.“ Russell versuchte daraufhin mit der in seinem Hauptwerk *Principia Mathematica* (erschienen 1910) eingeführten Typentheorie die Probleme der Fregeschen Arithmetik zu umgehen, war sich jedoch am Ende seines Lebens selbst nicht ganz sicher, ob er damit Erfolg hatte. Der Ansatz Zermelos mit seinen Axiomen setzte sich schließlich durch, was im Wesentlichen auch auf seiner Einfachheit, im Gegensatz zur Kompliziertheit der Typentheorie Russells, beruhte.

[26] Siehe 1.1.5.

[27] Die Definition von „$\subseteq$“ für Klassen ist analog derjenigen der Mengen.

1.4 Ordinalzahlen

In diesem Abschnitt werden wir - ganz klassisch - die natürlichen Zahlen auf die sogenannten Ordinalzahlen verallgemeinern, so dass wir schlussendlich „natürliche Zahlen“ beliebiger Kardinalität erhalten werden, auf denen wir das Prinzip der vollständigen Induktion der natürlichen Zahlen zur transfiniten Induktion weiterentwickeln werden können. Wir orientieren uns dabei grob an [Jec78].

Definition 1.4.1 (Wohlordnung)
Eine total geordnete Menge $(M, \leq)$ heiße **Wohlordnung**, wenn für jedes $A \subseteq M$ gilt: A besitzt ein Minimum.

Beispiel 1.4.2 (Für Wohlordnungen)

1. Jede endliche Menge ist wohlordnenbar.
2. Die von-Neumann-Zahlen ω sind wohlgeordnet mit $\subseteq$.
3. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist nicht wohlgeordnet.

Beweis. 1. Wir wählen eine beliebige totale Ordnung auf der endlichen Menge aus. Diese erfüllt dann bereits die Wohlordnungseigenschaft.

2. Zeige zuerst per Induktion, dass ω bezüglich $\subseteq$ total geordnet ist.

   Die Induktionsbehauptung lautet, dass jede Zahl $n \in \omega$ jeden ihrer Vorgänger beinhaltet.

   Die Zahl $0 = \emptyset$ hat keine Vorgänger und daher gilt der Induktionsanfang.

   Gelte die Behauptung nun für $n \in \omega$. Dann ist $n + 1 := n \cup \{n\} \supset n$, und da n jeden Vorgänger beinhaltet, enthält auch $n + 1$ jeden Vorgänger.

   Also ist ω total geordnet.

   Sei nun $A \subseteq \omega$ beliebig. Gäbe es kein Minimum in A, so gäbe es eine unendliche echt absteigende Kette
   $$n_1 \supsetneq n_2 \supsetneq n_3 \supsetneq ...$$
   in A. Nun ist aber n_1 in jedem Fall endlich, da jedes Element in ω der induktiven Definition nach endlich ist. Also kann es keine unendliche echt absteigende Kette in A geben und A besitzt daher ein Minimum.

3. Betrachte $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ die Zahl $n - 1 \in \mathbb{Z}$ und daher eine unendliche, echt absteigende Kette, also kann $\mathbb{Z}$ keine Wohlordnung sein.

$\square$

Bemerkung 1.4.3 Für bessere Lesbarkeit und Flexibilität werden wir in Zukunft auch strenge Totalordnungen, also nicht antisymmetrische, irreflexive, vollständige Ordnungen als totale Ordnungen bezeichnen und schreiben dann $(M, <)$ statt $(M, \leq)$. Dies ist korrekt, da jede strenge Totalordnung $(M, <)$ zu einer totalen Ordnung $(M, \leq)$ umdefiniert werden kann (und umgekehrt), indem wir $\forall a, b \in M$ setzen:
$$a \leq b \ :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \ (a < b) \vee (a = b).$$

Definition 1.4.4 (Anfangsstück)
Sei $(M, <)$ eine totale Ordnung mit $M \neq \emptyset$. Dann heißt $S \subseteq M$ **Anfangsstück** von M, falls
$$\forall x \in S \ \forall y \in M : y < x \Rightarrow y \in S.$$

Definition 1.4.5 (erzeugtes Anfangsstück)
Sei $(M, <)$ eine totale Ordnung mit $M \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $S \subsetneq M$ heißt von $\alpha \in M$ **erzeugtes Anfangsstück**, falls
$$S = M_\alpha := \{x \in M \mid x < \alpha\}.$$

Satz 1.4.6 (Charakterisierung von Wohlordnungen)
Sei $(M, <)$ eine total geordnete Menge. Dann sind äquivalent:

1. $(M, <)$ ist wohlgeordnet,
2. Jedes Anfangsstück $S \subsetneq M$ ist von einem $\alpha \in M$ erzeugt.

Mit dem Auswahlaxiom:

3. Es gibt keine unendlich absteigenden Ketten, d.h. es gibt keine $\{m_1, m_2, m_3, ..\} \subseteq M$ so, dass
$$m_1 > m_2 > m_3 > ...$$
gilt.

Beweis. „1. $\Longrightarrow$ 2.“: Sei zuerst $(M, <)$ wohlgeordnet und sei $S \subsetneq M$ ein Anfangsstück. Setze $\alpha := \min(M \backslash S)$. Sei $s \in S$. Dann ist $s < \alpha$ und daher $s \in M_\alpha$. Sei $m \in M_\alpha$. Dann ist $m < \alpha$, und da α das Minimum aller nicht zu S gehörigen Elemente ist, folgt $m \in S$. Also wird S von α erzeugt.

„2. $\Longrightarrow$ 1.“: Sei $\emptyset \neq X \subseteq M$. Betrachte
$$S_X := \{m \in M \mid \forall x \in X : m < x\}.$$
Dies ist ein Anfangsstück, denn falls $y < s \in S_X$, so ist $\forall x \in X : y < s < x$, also ist auch $y \in S_X$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\alpha \in M$ so, dass $S_X = M_\alpha$ ist. Wir zeigen noch, dass $\alpha = \min X$ ist. Gäbe es ein $x \in X$ so, dass $x < \alpha$ gilt, wäre $x \in M_\alpha$, aber $x \notin S_X$, Widerspruch. Also gilt $\alpha \leq x \ \forall x \in X$. Wäre $\alpha \notin X$, so wäre wegen $\alpha < x \ \forall x \in X$ auch $\alpha \in S_X = M_\alpha \not\ni \alpha$, ein Widerspruch.

„1. $\Longrightarrow$ 3.“: Folgt sofort aus der Wohlordnungseigenschaft von M.

„3. $\overset{\mathcal{AC}}{\Longrightarrow}$ 1.“: Wenn M nicht wohlgeordnet ist, gibt es ein $A \subseteq M$, das kein Minimum besitzt, also ist A unendlich. Sei $f : \mathcal{P}(M) \to M$ eine Auswahlfunktion auf M. Definiere rekursiv die Funktion $m : \mathbb{N} \to M$[28]:
$$m(n) := \begin{cases} f(A), & \text{falls } n = 0, \\ f(\{a \in A \mid a < m(n-1)\}), & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann haben wir aber
$$m(0) > m(1) > m(2) > ... ,$$
im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiel 1.4.7 Wie wir bereits gesehen haben, ist $(\mathbb{Z}, <)$ keine Wohlordnung. Also muss es nach dem letzten Satz ein Anfangsstück geben, das nicht erzeugt wird, aber wie sieht ein solches nicht erzeugte Anfangsstück aus?

Wir betrachten $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}$. Dann ist $\emptyset$ ein Anfangsstück, weil $\forall a \in \emptyset \ \forall z \in \mathbb{Z} : z < a \Rightarrow z \in \emptyset$ gilt. Wäre nun $\emptyset$ von einem $\alpha \in \mathbb{Z}$ erzeugt, dann wäre $\mathbb{Z}_\alpha = \{z \in \mathbb{Z} \mid z < \alpha\} \neq \emptyset$ ↯!

Definition 1.4.8 (Ordnungserhaltende Abbildung)
Seien $(M, <_M), (N, <_N)$ zwei totale Ordnungen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f **ordnungserhaltend**, wenn
$$\forall m_1, m_2 \in M : \ m_1 <_M m_2 \implies f(m_1) <_N f(m_2)$$
gilt.

Lemma 1.4.9 (Eigenschaften ordnungserhaltender Abbildungen)
Seien $(M, <_M), (N, <_N), (O, <_N)$ totale Ordnungen und $f : M \to N$, $g : N \to O$ ordnungserhaltende Abbildungen. Dann ist auch
$$g \circ f : M \to O$$
ordnungserhaltend.
Sei zusätzlich f bijektiv. Dann ist auch f^{-1} ordnungserhaltend.

[28]Wir hatten in 1.1.9 die 0 als zu $\mathbb{N}$ gehörig definiert.

Beweis. Seien $n_1, n_2 \in N$ mit $n_1 < n_2$. Wir haben $f(n_1) <_N f(n_2)$ und daher $g(f(n_1)) <_O g(f_{n_2})$.
Wäre f^{-1} nicht ordnungserhaltend, gäbe es ein

$$(a, b) \in K := \{(n_1, n_2) \in N \times N \mid n_1 <_N n_2 \ \wedge \ f^{-1}(n_1) >_M f^{-1}(n_2)\}.$$

Dann gilt wegen der Ordnungserhaltungseigenschaft von f

$$a = f(f^{-1}(a)) >_N f(f^{-1}(b)) = b$$

im Widerspruch zur Definition von K. □

Definition 1.4.10 (Ordnungsisomorphie)
Seien M, N zwei total geordnete Mengen. Wenn es eine ordnungserhaltende, bijektive Abbildung

$$f : M \to N$$

gibt, so sagen wir, M und N sind **ordnungsisomorph**[29] und schreiben $M \simeq N$.

Bemerkung 1.4.11 Offensichtlich handelt es sich bei $\simeq$ um eine Äquivalenzrelation, wenn sie auf einer Menge von totalen Ordnungen definiert wird. Die Klasse *aller* totalen Ordnungen ist jedoch keine Menge mehr, sondern eine echte Klasse. Man könnte jetzt versucht sein, trotzdem die Äquivalenzklassen bezüglich $\simeq$ zu bilden und zu einer Klasse zusammenzufassen. Dies geht auch nicht, da bereits die Äquivalenzklassen keine Mengen mehr darstellen und also auch nicht zu einer Klasse vereinigt werden können. Wir werden uns jetzt stattdessen auf Wohlordnungen beschränken und versuchen geeignete Repräsentanten für Wohlordnungen zu finden, die Mengen sind - die sogenannten Ordinalzahlen.

Proposition 1.4.12 Sei $(M, <)$ eine Wohlordnung.

1. Wenn $\phi : M \to M$ ordnungserhaltend ist, dann gilt $\forall m \in M : \phi(m) \geq m$.
2. $\forall \alpha \in M : M \not\simeq M_\alpha$.
3. $\alpha \neq \beta \Rightarrow M_\alpha \not\simeq M_\beta$.
4. Der einzige ordnungserhaltende Automorphismus $\phi : M \to M$ ist die Identität.
5. Sei N eine weitere Wohlordnung und sei $\phi : M \to N$ eine Ordnungsisomorphie. Dann ist für jedes $\alpha \in M$ auch
$$\phi\big|_{M_\alpha} : M_\alpha \to N_{\phi(\alpha)}$$
eine Ordnungsisomorphie und folglich $M_\alpha \simeq N_{\phi(\alpha)}$.

Beweis.

1. Angenommen es wäre nicht so. Dann gibt es
$$\xi := \min\{m \in M \mid \phi(m) < m\}.$$
Da ϕ ordnungserhaltend ist, gilt $\phi(\phi(\xi)) < \phi(\xi) < \xi$. Also ist auch $\phi(\xi) \in \{m \in M \mid \phi(m) < m\}$, aber $\phi(\xi) < \xi$ ↯, da ξ minimal!
2. Angenommen es gäbe ein $\alpha \in M$ und einen Ordnungsisomorphismus $\phi : M \to M_\alpha$. Dann wäre $\phi(\alpha) \ \geq \ \alpha$ ($\Longleftrightarrow \phi(\alpha) \not< \alpha$), wegen 1. und daher $\phi(\alpha) \notin M_\alpha$ ↯.
3. Sei ohne Beschränkung $\alpha < \beta \in M$. Setze $N := M_\beta$. Es ist $N_\alpha = M_\alpha$. Wäre nun $M_\alpha \simeq M_\beta$, so würde auch $N_\alpha \simeq N$ gelten, ein Widerspruch wegen 2.
4. Angenommen, es gäbe neben der Identität noch einen weiteren Ordnungsautomorphismus ϕ. Dann betrachte
$$\xi := \min\{m \in M \mid \phi(m) \neq m\}.$$
Wegen 1. gilt $\phi(\xi) > \xi$, $\forall m > \xi : \phi(m) \geq m$ und $\forall m < \xi : \phi(m) = m$. Also wird gar nicht auf ξ abgebildet, ein Widerspruch zur Surjektivität von ϕ!

[29] Wir sagen auch *ordnungserhaltend isomorph* oder einfach *isomorph*, je nachdem ob es aus dem Kontext heraus klar ist.

5. Sei $x \in M : x < \alpha$. Dann ist $\phi(x) < \phi(\alpha)$ und also $\phi(x) \in N_{\phi(\alpha)}$ und damit $\phi(M_\alpha) \subseteq N_{\phi(\alpha)}$. Sei nun $n \in N_{\phi(\alpha)}$. Dann gibt es ein $m \in M : \phi(m) = n$. Wäre $m \not< \alpha$, so wäre $\phi(m) \geq \phi(\alpha)$. Dann hätten wir also
$$\phi(\alpha) \leq \phi(m) = n < \phi(\alpha),$$
ein Widerspruch. Damit bildet $\phi\big|_\alpha$ auf ganz $N_{\phi(\alpha)}$ ab und ist also ein Ordnungsisomorphismus. □

Satz 1.4.13 (Trichotomie der Wohlordnungen)
Seien M, N Wohlordnungen. Dann gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

1. $M \simeq N$,
2. $\exists \alpha \in M : M_\alpha \simeq N$,
3. $\exists \alpha \in N : M \simeq N_\alpha$.

Beweis. Wir zeigen zuerst indirekt, dass nicht mehr als eine der obigen Eigenschaften erfüllt sein kann.
„1. + 2.“: $M_\alpha \simeq M \simeq N \Rightarrow M_\alpha \simeq M$ ↯ wegen 2. in 1.4.12.
„1. + 3.“: Wie eben.
„2. + 3.“: Gelten $M_\alpha \simeq N$ und $M \simeq N_\beta$ und sei $\phi : M \to N_\beta$ ein Isomorphismus. Wir wissen wegen 1.4.12, dass
$$\phi(M_\alpha) = (N_\beta)_{\phi(\alpha)}$$
gilt. Insgesamt haben wir also $N \simeq M_\alpha \simeq (N_\beta)_{\phi(\alpha)} = N_{\min\{\beta,\phi(\alpha)\}} = N_{\phi(\alpha)}$, was wegen 2. in 1.4.12 ein Widerspruch ist. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.
Es bleibt nun noch die Existenz zu zeigen. Betrachte hierzu die Menge
$$\Gamma := \{(m, n) \in M \times N \mid M_m \simeq N_n\}.$$
Wegen $\emptyset = M_{\min M} \simeq N_{\min N} = \emptyset$ ist diese Menge nichtleer. Außerdem ist sie eine Funktion: seien $(m, n), (m, n') \in \Gamma$. Dann ist $N_n \simeq M_m \simeq N_{n'} \Rightarrow N_n \simeq N_{n'}$. Wegen 3. in 1.4.12 haben wir $n = n'$.

Der Definitionsbereich $\operatorname{dom}(\Gamma)$ ist ein Anfangsstück von M: Sei dazu $m \in \operatorname{dom}(\Gamma)$ und $x < m$. Dann gibt es ein $n \in N$ so, dass $M_m \simeq N_n$ gilt. Sei ϕ ein solcher Isomorphismus, dann gilt:
$$\phi(\underbrace{(M_m)_x}_{=M_x}) = \underbrace{(N_n)_{\phi(x)}}_{=N_{\phi(x)}} \Longrightarrow M_x \simeq N_{\phi(x)}$$
und es ist also $x \in \operatorname{dom}(\Gamma)$.
Analog zeigt man, dass das Bild $\operatorname{Im}(\Gamma)$ ein Anfangsstück von N ist.

Γ ist ordnungserhaltend: Seien $a, b \in \operatorname{dom}(\Gamma)$ mit $a < b$ und sei $\psi : M_b \to N_{\Gamma(b)}$ ein Isomorphismus. Wir stellen zuerst fest: $\psi(a) < \Gamma(b)$. Es ist $\psi|_{M_a} : M_a \to (N_{\Gamma(b)})_{\psi(a)} = N_{\min\{\Gamma(b),\psi(a)\}} = N_{\psi(a)}$ wegen 1.4.12 ein Isomorphismus. Nun haben wir
$$N_{\Gamma(a)} \simeq M_a \simeq N_{\psi(a)}.$$
Wegen 1.4.12, (3.) ist also $\Gamma(a) = \psi(a) < \Gamma(b)$. Damit ist Γ ordnungserhaltend, und damit injektiv. Wir haben also insgesamt eine Ordnungsisomorphie
$$\Gamma : \operatorname{dom}(\Gamma) \to \operatorname{Im}(\Gamma)$$
und damit ist $\operatorname{dom}(\Gamma) \simeq \operatorname{Im}(\Gamma)$.

Nun unterscheiden wir vier Fälle:

i)	$\operatorname{dom}(\Gamma) = M$ und $\operatorname{Im}(\Gamma) \neq N$:	nach 1.4.6 gilt $\exists n \in N : \operatorname{Im}(\Gamma) = N_n \simeq M$.
ii)	$\operatorname{dom}(\Gamma) \neq M$ und $\operatorname{Im}(\Gamma) = N$:	nach 1.4.6 gilt $\exists m \in M : \operatorname{dom}(\Gamma) = M_m \simeq N$.
iii)	$\operatorname{dom}(\Gamma) = M$ und $\operatorname{Im}(\Gamma) = N$:	wir haben $M \simeq N$.
iv)	$\operatorname{dom}(\Gamma) \neq M$ und $\operatorname{Im}(\Gamma) \neq N$:	dieser Fall kann nicht auftreten, wie wir jetzt zeigen.

Um den Fall iv) ausschließen zu können, nehmen wir an er gelte. Wegen 1.4.6 gibt es $m \in M, n \in N$ so, dass $\operatorname{dom}(\Gamma) = M_m$ und $\operatorname{Im}(\Gamma) = N_n$ gilt, also haben wir $M_m \simeq N_n$. Also ist $(m, n) \in \Gamma$, was ein Widerspruch ist zu $\operatorname{dom}(\Gamma) = M_m$. □

Definition 1.4.14 (Transitive Menge)
Eine Menge M heißt transitiv, wenn $\forall x, y \in V$ gilt:

$$x \in y \in M \implies x \in M.$$

Jetzt haben wir endlich alles beisammen, um das zentrale Objekt unserer Betrachtungen definieren zu können.

Definition 1.4.15 (Ordinalzahl)
Eine Menge α heißt **Ordinalzahl**, wenn

1. $(\alpha, \in)$ eine Wohlordnung ist und
2. α transitiv ist.

Wir nennen die Klasse aller Ordinalzahlen $\mathfrak{Ord}$.

Bemerkung 1.4.16 Wir werden in Zukunft auch das Symbol $<$ statt $\in$ verwenden, wenn wir Ordinalzahlen vergleichen. Es geht dabei darum, jeweils entweder den Ordnungscharakter oder den Mengencharakter von Ordinalzahlen zu betonen.

Satz 1.4.17 (Eigenschaften von Ordinalzahlen)
Sei α eine Ordinalzahl. Dann gilt:

1. $\alpha \notin \alpha$,
2. $x \in \alpha \implies x$ ist Ordinalzahl,
3. $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ ist Ordinalzahl.

Beweis.

1. Folgt sofort aus Folgerung 1.1.3.
2. Sei $x \in \alpha$. Für alle $y \in x \in \alpha$ gilt: $y \in \alpha$, daher ist $x \subseteq \alpha$. Damit ist x als Teilmenge einer Wohlordnung auch wohlgeordnet. Wir müssen jetzt noch die Transitivität von x zeigen. Sei dazu $z \in y \in x$. Wegen der Transitivität von α ergibt sich sofort $y \in \alpha$ und $z \in \alpha$, wir haben also $\{x, y, z\} \subseteq \alpha$. Wegen der Transitivität der Wohlordnung bezüglich $\in$ in α folgt sofort $z \in x$ und damit ist die Transitivität von x gezeigt.
3. Bezeichne $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$. Wir zeigen zuerst die Wohlordnungseigenschaft. Da α eine Wohlordnung ist, ist β bezüglich $\in$ total geordnet. Sei $A \subseteq \beta$. Ist $A \subseteq \alpha$, existiert $\min A$, da α eine Wohlordnung ist. Falls $A \nsubseteq \alpha$ gilt, so haben wir $\alpha \in A$. Dann ist $\min A = \alpha$ falls $A = \{\alpha\}$ und $\min A = \min(A \backslash \{\alpha\})$ andernfalls. Also ist β eine Wohlordnung.

   Nun zur Transitivität. Sei $x \in y \in \beta$. Falls $y = \alpha$ gilt, ist $x \in y = \alpha \subseteq \beta$. Falls $y \in \alpha$ gilt, so ist wegen der Transitivität von α auch $x \in \alpha \subseteq \beta$ und wir haben die Transitivität von β gezeigt und damit folgt insgesamt, dass β eine Ordinalzahl ist. □

Folgerung 1.4.18 Die John-von-Neumann Zahlen sind Ordinalzahlen.

Beweis. Per Induktion über die rekursive Definition.
Die leere Menge ist offensichtlich eine Ordinalzahl.
Sei nun $n \in \omega$ eine Ordinalzahl. Dann ist mit 1.4.17 3. auch $n + 1 = n \cup \{n\}$ eine Ordinalzahl und wir sind fertig. □

Satz 1.4.19 (Eindeutigkeit der Ordinalzahlen)
Seien α, β Ordinalzahlen mit $\alpha \simeq \beta$. Dann gilt

$$\alpha = \beta.$$

Beweis. Sei $\psi : A \to B$ ein Ordnungsisomorphismus. Angenommen, sie wären verschieden. Dann definiere

$$\gamma := \min\{x \in \alpha \mid \psi(x) \neq x\}.$$

Dann ist

$$\psi\big|_{\alpha_\gamma} : \alpha_\gamma \to \beta_{\psi(\gamma)}$$

die Identität und folglich $\psi(\alpha_\gamma) = \alpha_\gamma$. Weiterhin ist $\alpha_\gamma = \gamma$, denn $\alpha_\gamma = \{x \in \alpha \mid x \in \gamma\}$. Nun haben wir

$$\gamma = \alpha_\gamma = \psi(\alpha_\gamma) = \psi(\gamma),$$

was ein Widerspruch zur Definition von γ ist. Also ist $\alpha = \beta$. □

Bemerkung 1.4.20 Die John-von-Neumann-Zahlen ω sind also *die ersten* Ordinalzahlen, in dem Sinne, dass es keine Ordinalzahlen mit endlich vielen Elementen gibt, die nicht in ω liegen.

Folgerung 1.4.21 (Trichotomie der Ordinalzahlen)
Seien α, β Ordinalzahlen. Dann gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:

1. $\alpha = \beta$,
2. $\alpha \in \beta$,
3. $\beta \in \alpha$.

Beweis. Wir benutzen die Sätze 1.4.13 und 1.4.19. Da Ordinalzahlen Wohlordnungen sind, gilt immer genau eine der folgenden Eigenschaften:

1. $\alpha \simeq \beta$ $(\Leftrightarrow \alpha = \beta)$,
2. $\exists \gamma \in \beta : \alpha \simeq \beta_\gamma = \gamma \in \beta$ $(\Leftrightarrow \alpha \in \beta)$,
3. $\exists \gamma \in \alpha : \beta \simeq \alpha_\gamma = \gamma \in \alpha$ $(\Leftrightarrow \beta \in \alpha)$. □

Folgerung 1.4.22 Ist O eine Menge von Ordinalzahlen, so ist auch $\bigcup O$ eine Ordinalzahl.

Beweis. Wegen der eben bewiesenen Trichotomie wissen wir, dass O wohlgeordnet ist, da es keine unendlichen absteigenden Ketten von Mengen gibt nach 1.1.2. Wir überprüfen die Transitivität. Sei $\alpha \in \beta \in \bigcup O$. Wegen $\beta \in \bigcup O$ gibt es ein $\gamma \in O$ so, dass $\alpha \in \beta \in \gamma$ ist. Da γ eine Ordinalzahl ist, gilt $\alpha \in \gamma$ wegen der Transitivität von γ und damit ist $\alpha \in \bigcup O$. □

Satz 1.4.23 (Ordinalzahlen als Repräsentanten für Wohlordnungen)
Für jede Wohlordnung $(A, <)$ gibt es genau eine Ordinalzahl α so, dass

$$A \simeq \alpha.$$

Beweis. Definiere die Mengen

$$X := \{a \in A \mid \exists \alpha \in \mathfrak{Ord} : A_a \simeq \alpha\} \text{ und } Y := \{\alpha \in \mathfrak{Ord} \mid \exists a \in A : A_a \simeq \alpha\}^{30}.$$

Diese Mengen sind nichtleer, da $A_{\min A} \simeq 0 = \emptyset$ gilt. Sei $f : X \to Y$ jene Funktion, die jedes $a \in X$ auf das eindeutig bestimmte (siehe 1.4.19) $\alpha \in Y$ abbildet, für das $A_a \simeq \alpha$ gilt. Mit dieser Definition ist f bijektiv, denn sind $a, b \in A$ mit $f(a) = f(b)$, so gilt

$$A_a \simeq f(a) = f(b) \simeq A_b$$

und daher mit 1.4.12 3. $a = b$.

Wir zeigen jetzt, dass X ein Anfangsstück von A und f ordnungserhaltend ist. Sei $a' < a \in X$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ so, dass $A_a \simeq \alpha$ gilt. Sei $\psi : A_\alpha \to \alpha$ eine solche Isomorphie. Mit 1.4.12 5. erhalten wir

$$A_{a'} = (A_a)_{a'} \simeq \alpha_{\psi(a')} = \psi(a') \in \alpha$$

[30] Es lässt sich mit dem Ersetzungsaxiom zeigen, dass Y wirklich eine Menge ist.

und mit 1.4.17 ist $\psi(a') \in \mathfrak{Ord}$. Daher ist auch $a' \in X$ und $f(a') \in f(a)$.

Nun wollen wir zeigen, dass Y eine Ordinalzahl ist. Da Y nur Ordinalzahlen enthält, ist Y wegen der Trichotomie der Ordinalzahlen mit $\in$ total geordnet. Sei $A \subseteq Y$. Angenommen A hätte kein Minimum. Dann gäbe es, da A total geordnet ist, eine unendliche absteigende Kette bezüglich $\in$, im Widerspruch zu 1.1.2. Außerdem ist Y transitiv: seien dazu $\alpha \in \beta \in Y$ gegeben. Dann gibt es ein $b \in A$ so, dass $A_b \simeq \beta$. Sei $\psi : \beta \to A_b$ ein solcher Isomorphismus. Dann ist mit 1.4.12 5. $\alpha \simeq (A_b)_{\psi(\alpha)} = A_{\psi(\alpha)}$ und damit $\alpha \in Y$. Also ist insgesamt $Y \in \mathfrak{Ord}$.

Wir haben gezeigt, dass f eine Ordnungsisomorphie ist und daher gilt

$$X \simeq Y \in \mathfrak{Ord}.$$

Wäre nun $X \neq A$, so gäbe es wegen 1.4.6 ein $a \in A$ so, dass $X = A_a$ wäre. Also würde

$$A_a \simeq Y \in \mathfrak{Ord}$$

gelten, und daher wäre $a \in X$, ein Widerspruch. □

Bemerkung 1.4.24 Wir haben nun in den Ordinalzahlen geeignete Repräsentanten für Wohlordnungen gefunden. Es stellt sich nun die Frage, ob $\mathfrak{Ord}$ eine Menge oder eine echte Klasse ist.

Satz 1.4.25 (Paradoxon von Burali-Forti)[31]
Die Klasse $\mathfrak{Ord}$ ist keine Menge.

Beweis. Wir zeigen: wäre $\mathfrak{Ord}$ eine Menge, so wäre es auch eine Ordinalzahl. Wegen der Trichotomie der Ordinalzahlen ist $\mathfrak{Ord}$ total geordnet und da es keine unendlichen absteigenden Ketten von Mengen gibt (siehe 1.1.2), besitzt jede Teilmenge von $\mathfrak{Ord}$ auch ein Minimum. Da Elemente von Ordinalzahlen wieder Ordinalzahlen sind nach 1.4.17, ist $\mathfrak{Ord}$ auch transitiv und insgesamt also selbst eine Ordinalzahl. Dann wäre aber

$$\mathfrak{Ord} \in \mathfrak{Ord},$$

ein Widerspruch zu 1.4.17. □

Folgerung 1.4.26 Die Klasse $\mathfrak{Ord}$ ist bezüglich $\in$ wohlgeordnet.

Beweis. Analog zum vorherigen Beweis. □

1.5 Transfinite Induktion und transfinite Rekursion

Wir wollen nun sehen, dass man die Ordinalzahlen benutzen kann, um die vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen zur sogenannten *transfiniten Induktion* über Ordinalzahlen zu verallgemeinern. Weiterhin werden wir sehen, dass auch rekursive Definitionen sich auf Ordinalzahlen erweitern lassen. Dazu ist es zunächst nützlich, die Ordinalzahlen in zwei Typen zu unterscheiden.

Definition 1.5.1 (Typen von Ordinalzahlen)
Sei $\alpha \in \mathfrak{Ord},\ \alpha \neq 0 (= \emptyset)$. Wir nennen α **Nachfolgerordinalzahl** oder kurz **Nachfolger**, falls α ein Maximum besitzt. Andernfalls nennen wir α **Limesordinalzahl** oder kurz **Limes**.

Oftmals findet man auch die folgende äquivalente Formulierung als Definition der Nachfolgerordinalzahlen.

Satz 1.5.2 (Charakterisierung der Nachfolger)
Sei $\alpha \in \mathfrak{Ord},\ \alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$\alpha \text{ ist Nachfolger} \iff \exists \beta \in \mathfrak{Ord} : \alpha = \beta + 1 (= \beta \cup \{\beta\}).$$

Beweis. Sei α ein Nachfolger. Setze $\beta := \max \alpha$. Dann gilt für alle $x \in \alpha \backslash \{\beta\} : x \in \beta$. Daher ist $\beta \cup \{\beta\} = \alpha$. Sei nun $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Dann gilt für alle $x \in \alpha \backslash \{\beta\} : x \in \beta$ und daher ist $\beta = \max \alpha$. □

[31] Dieses Paradoxon wurde 1897 von Cesare Burali-Forti, einem italienischen Mathematiker, bewiesen und ist eine der ältesten Mengenparadoxien.

Satz 1.5.3 (Nachfolger sind echte Klasse)
Die Klasse aller Nachfolgerordinalzahlen $N := \{\alpha \in \mathfrak{Ord} \mid \exists \beta \in \mathfrak{Ord} : \alpha = \beta + 1\}$ ist keine Menge.

Beweis. Definiere $F : N \to \mathfrak{Ord}$ gemäß

$$F(\beta + 1) := \beta.$$

Wäre N eine Menge, so wäre nach dem Ersetzungsaxiom auch

$$\{F(n) \in \mathfrak{Ord} \mid n \in N\} = \mathfrak{Ord}$$

eine Menge, im Widerspruch zu Burali-Forti. □

Satz 1.5.4 Sei $\alpha \in \mathfrak{Ord},\ \alpha \neq 0$. Dann gilt

$$\alpha \in \mathfrak{Ord} \text{ ist ein Limes} \iff \bigcup \alpha = \alpha.$$

Beweis. „ $\Longrightarrow$ “: Sei α ein Limes. Dann ist $\bigcup \alpha = \bigcup_{\lambda \in \alpha} \lambda \subseteq \alpha$, da wegen der Transitivität der Ordinalzahlen für jedes $x \in \lambda \in \alpha$ gilt: $x \in \alpha$. Sei nun $\gamma \in \alpha$ beliebig. Da α kein Maximum besitzt, muss es also ein $\lambda \in \alpha$ geben so, dass $\gamma \in \lambda$ ist. Dann haben wir insbesondere $\gamma \in \bigcup_{\lambda \in \alpha} \lambda = \bigcup \alpha$.

„ $\Longleftarrow$ “: Sei nun $\bigcup \alpha = \alpha$. Wäre α kein Limes, wäre es Nachfolger und es gäbe ein $\beta \in \mathfrak{Ord}$ mit $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Dann hätten wir

$$\bigcup \alpha = \bigcup_{\lambda < \alpha} \lambda = \bigcup_{\lambda \in \beta \cup \{\beta\}} \lambda = \left(\bigcup_{\lambda \in \beta} \lambda \right) \cup \beta = \beta \neq \alpha,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiel 1.5.5 (Nachfolger und Limes)

1. Jede endliche Ordinalzahl außer der 0 ist ein Nachfolger.
2. ω ist ein Limes.
3. Für jedes $M \in V$ mit $|M| = \infty$ ist $H(M) := \{\alpha \in \mathfrak{Ord} \mid |\alpha| \leq |M|\}$ ein Limes.

Beweis.

1. Wie wir in 1.4.20 gesehen haben, sind alle endlichen Ordinalzahlen genau die von-Neumann-Zahlen. Da $n+1 := n \cup \{n\}$ für jedes $n \in \omega$ gilt, folgt sofort die Behauptung mit Satz 1.5.2.
2. Für jedes $n \in \omega$ gilt: $n \in n+1$, daher besitzt ω kein Maximum und ist Limes.
3. Wir zeigen zuerst, dass $H(M)$ eine Menge ist und stellen fest: $M \times M$ ist eine Menge mit dem Potenzmengenaxiom, da für alle $m, n \in M : (m, n) = \{\{m\}, \{m, n\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ ist. Weiterhin ist auch die Klasse aller Wohlordnungen $< \subseteq M \times M$ eine Menge, da $\mathcal{P}(M \times M)$ eine Menge ist, und die Eigenschaft, Wohlordnung zu sein mit einem Prädikat $f(x)$ ausgedrückt werden kann, so dass mit dem Aussonderungsaxiom auch $W := \{< \subseteq M \times M \mid f(<)\}$ eine Menge ist. Sei F diejenige Klassenfunktion, die jede Wohlordnung w auf diejenige eindeutig bestimmte Ordinalzahl α abbildet, so dass $w \simeq \alpha$ gilt (siehe dazu Satz 1.4.23). Dann ist mit dem Ersetzungsaxiom
$$h := \{F(w) \in \mathfrak{Ord} \mid w \in W\}$$
eine Menge. Es gilt für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$:
$$\exists g : \alpha \to M \text{ injektiv} \iff \exists \text{ Wohlordnung } w \text{ über M mit } w \simeq \alpha.$$
Dies ist klar, da eine Bijektion auch eine Injektion ist und weil $g(\alpha)$ eine Wohlordnung auf M induziert. Damit ist also gezeigt, dass $h = H(M)$ und damit eine Menge ist.

Nun zeigen wir, dass $H(M)$ eine Ordinalzahl ist. Da $H(M)$ eine Menge von Ordinalzahlen ist, die wegen 1.4.21 und 1.1.2 bezüglich $\in$ wohlgeordnet sind, genügt es die Transitivität von $H(M)$ zu zeigen. Sei dazu $\alpha \in \beta \in H(M)$. Dann gibt es eine injektive Funktion $g : \beta \to M$. Wegen $\alpha \in \beta$ ist wegen der Transitivität der Ordinalzahlen $\alpha \subseteq \beta$ und daher ist $g\big|_\alpha$ auch eine injektive Abbildung nach M und deshalb $\alpha \in H(M)$.

Wäre $H(M)$ ein Nachfolger, so gäbe es ein $\alpha = \max H(M)$. Also gibt es eine injektive Abbildung $g : \alpha \to M$. Damit wird auf M eine Wohlordnung induziert. Ist g nicht surjektiv, gibt es eine injektive Abbildung $\tilde{g} : \alpha + 1 \to M$ und wir hätten $\alpha + 1 \in H(M)$, im Widerspruch zur Maximalität von α. Ist g bijektiv, so ist $\omega \subseteq \alpha$, da M unendlich ist. Definiere[32] eine Funktion $\tilde{g} : \alpha + 1 \to M$ durch

$$\tilde{g}(\beta) := \begin{cases} \beta, & \text{falls } \beta \in \alpha + 1 \backslash (\omega \cup \{\alpha\}), \\ 0, & \text{falls } \beta = \alpha, \\ \beta + 1, & \text{falls } \beta \in \omega. \end{cases}$$

Dies ist auch eine bijektive Funktion und damit ist $\alpha + 1 \in H(M)$, wieder im Widerspruch zur Maximalität von α. Also ist $H(M)$ eine Limesordinalzahl.

□

Satz 1.5.6 (Transfinite Induktion)
Sei $P(\alpha)$ eine Aussage, die von Ordinalzahlen abhängt, und es gelte[33]

$$\forall \alpha \in \mathfrak{Ord} : \quad (\forall \beta < \alpha : P(\beta)) \Longrightarrow P(\alpha).$$

Dann gilt $P(\alpha)$ für jede Ordinalzahl α.

Beweis. Würde $P(\alpha)$ nicht für alle $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ gelten, dann gäbe es $\beta := \min\{\alpha \in \mathfrak{Ord} \mid \neg P(\alpha)\}$. Dann ist also $P(\gamma)$ für jedes $\gamma < \beta$ erfüllt. Mit der Voraussetzung folgt dann sofort $P(\beta)$, ein Widerspruch. □

Die folgenden Charakterisierung der transfiniten Induktion kann in manchen Fällen einfacher anzuwenden sein als die obige und ist in jedem Fall die am häufigsten anzutreffende.

Satz 1.5.7 (Transfinite Induktion mit Fallunterscheidung)
Sei $P(\alpha)$ eine Aussage, die von Ordinalzahlen abhängt, und es gelte

1. $P(0)$ ist wahr.
2. $P(\alpha) \Longrightarrow P(\alpha + 1)$.
3. Falls $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ ein Limes ist, gilt $(\forall \lambda < \alpha : P(\lambda)) \Longrightarrow P(\alpha)$.

Dann gilt $P(\alpha)$ für jede Ordinalzahl α.

Beweis. Wäre $P(\alpha)$ nicht für alle $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ erfüllt, gäbe es eine kleinste Ordinalzahl $\beta \neq 0$, für die es nicht gilt. Ist β ein Nachfolger, gibt es ein γ so, dass $\beta = \gamma + 1$. Da $P(\gamma)$ gilt, muss mit 2. auch $P(\gamma + 1) = P(\beta)$ gelten, ein Widerspruch. Ist β ein Limes, so gilt für jedes $\gamma < \beta : P(\gamma)$. Dann muss mit 3. auch $P(\beta)$ gelten, ein Widerspruch. □

Satz 1.5.8 (Transfinite Rekursion)[34]
Sei $G : V \to V$ eine beliebige Klassenfunktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : \mathfrak{Ord} \to V$ so, dass für alle $\alpha \in \mathfrak{Ord}$

$$F(\alpha) = G\left(F\big|_\alpha\right)$$

gilt[35].

---

[32]Erinnerung: $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

[33]Tatsächlich versteckt sich der übliche Induktionsanfang bereits in dieser Aussage. Es ist nämlich $\beta < 0 : P(\beta)$ immer wahr, da es keine kleinere Ordinalzahl als 0 gibt und somit muss $P(0)$ erfüllt sein.

[34]Siehe auch Jec78, S. 17.

[35]Hierbei ist $F\big|_\alpha$ die Einschränkung von F auf α; es gilt also $F\big|_\alpha = \{(\beta, F(\beta)) \in \mathfrak{Ord} \times V \mid \beta < \alpha\}$. Beachte auch: $\mathfrak{Ord} \times V \subseteq V$ wegen der Tupeldefinition in 1.1.5. Damit ist F eine korrekt definierte Klasse.

Beweis. Wir zeigen zuerst mit transfiniter Induktion, dass es für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ genau eine Funktion f_α so gibt, dass für jedes $\beta < \alpha$

$$f_\alpha(\beta) = G\left(f_\alpha\big|_\beta\right)$$

und

$$f_\alpha\big|_\beta = f_\beta$$

gilt.

Sei $\alpha = 0 = \emptyset$. Dann ist die Voraussetzung sofort erfüllt, da es keine Ordinalzahl gibt, die kleiner als 0 ist.

Sei nun $\alpha = \gamma + 1$ und gelte für jedes $\beta < \alpha$ die Behauptung. Dann setze für jedes $\beta < \alpha$:

$$f_\alpha(\beta) := \begin{cases} f_\gamma(\beta) & \text{falls } \beta < \gamma, \\ G(f_\gamma) & \text{falls } \beta = \gamma. \end{cases}$$

Diese Definition ist eindeutig, da f_γ nach Induktionsvoraussetzung eindeutig ist und G eine Funktion ist. Wegen

$$f_\alpha(\beta) = f_\gamma(\beta) \overset{(IV)}{=} G\left(f_\gamma\big|_\beta\right) = G\left(f_\alpha\big|_\beta\right) \;\; \forall \beta < \gamma$$

und

$$f_\alpha(\gamma) = G(f_\gamma) = G\left(f_\alpha\big|_\gamma\right)$$

gilt der erste Teil der Behauptung. Sei jetzt $\beta < \alpha$ beliebig. Falls $\beta = \gamma$ ist, haben wir sofort

$$f_\alpha\big|_\gamma = f_\gamma.$$

Falls $\beta < \gamma$, ist

$$f_\alpha\big|_\beta = f_\gamma\big|_\beta \overset{(IV)}{=} f_\beta$$

und daher gilt auch der zweite Teil der Behauptung.

Falls α ein Limes ist, so setze

$$f_\alpha(\beta) := f_{\beta+1}(\beta).$$

Diese Definition ist eindeutig wegen der Eindeutigkeit der f_β nach Induktionsvoraussetzung. Sei $\gamma < \alpha$ und sei $\delta \in \gamma$. Dann gilt

$$f_\alpha(\delta) = f_{\delta+1}(\delta) \overset{(IV)}{=} f_\gamma\big|_{\delta+1}(\delta) = f_\gamma(\delta)$$

und damit $f_\alpha\big|_\gamma = f_\gamma$. Mit dem eben Bewiesenen gilt außerdem:

$$f_\alpha(\gamma) \overset{(Def)}{=} f_{\gamma+1}(\gamma) \overset{(IV)}{=} G(\underbrace{f_{\gamma+1}\big|_\gamma}_{\overset{(IV)}{=} f_\gamma}) = G\left(f_\alpha\big|_\gamma\right)$$

und damit ist auch der erste Teil der Aussage erfüllt und die Behauptung gilt für alle Ordinalzahlen.
Wir definieren nun die Klassenfunktion $F : \mathfrak{Ord} \to V$ gemäß

$$F(\alpha) := f_{\alpha+1}(\alpha).$$

Wir müssen noch zeigen, dass $F(\alpha) = G\left(F\big|_\alpha\right)$ gilt für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$. Wegen

$$F(\alpha) \overset{(Def.)}{=} f_{\alpha+1}(\alpha) = G\left(f_{\alpha+1}\big|_\alpha\right)$$

genügt es zu zeigen, dass $F\big|_\alpha = f_{\alpha+1}\big|_\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ ist. Falls $\alpha = 0 = \emptyset$ haben wir $F\big|_\emptyset = \emptyset = f_1\big|_\emptyset$. Sei nun $\alpha \in \mathfrak{Ord}\backslash\{0\}$ und $\delta \in \alpha$. Dann ist

$$F\big|_\alpha(\delta) = F(\delta) = f_{\delta+1}(\delta) = f_{\alpha+1}(\delta) = f_{\alpha+1}\big|_\alpha(\delta)$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Auch für die transfinite Rekursion gibt es eine Variante, in der mit Fallunterscheidungen gearbeitet wird, und die im Allgemeinen leichter anzuwenden ist.

Folgerung 1.5.9 (Transfinite Rekursion nach Fällen)
Seien $N : V \to V,\ L : V \to V$ beliebige Klassenfunktionen und sei $a \in V$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $F : \mathfrak{Ord} \to V$ mit[36]

$$\begin{aligned} F(0) &= \quad a, \\ F(\alpha+1) &= \quad N(F(\alpha)), \quad \text{falls } \alpha \text{ Nachfolger}, \\ F(\lambda) &= \quad L(F|_\lambda), \quad \text{falls } \lambda \text{ Limes}. \end{aligned}$$

Beweis. Definiere $G : V \to V$ gemäß

$$G(m) = \begin{cases} a & \text{falls } m = \emptyset, \\ N(m(\alpha)) & \text{falls } \exists \alpha \in \mathfrak{Ord} \text{ mit } m : \alpha + 1 \to V, \\ L(m) & \text{falls } \exists \lambda \in \mathfrak{Ord} \text{ Limes, so dass } m : \lambda \to V, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gibt es mit 1.5.8 eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $F : \mathfrak{Ord} \to V$ so, dass $\forall \alpha \in \mathfrak{Ord}$

$$F(\alpha) = G\left(F\big|_\alpha\right)$$

gilt. Wir haben dann

$$\begin{aligned} F(0) &= G\left(F\big|_\emptyset\right) = G(\emptyset) = a, \\ F(\alpha+1) &= G\left(F\big|_{\alpha+1}\right) = N\left(F\big|_{\alpha+1}(\alpha)\right) = N(F(\alpha)), \\ F(\lambda) &= G\left(F\big|_\lambda\right) = L\left(F\big|_\lambda\right) \text{ für } \lambda \text{ Limes.} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Definition 1.5.10 (transfinite Folge)
Eine Klassenfunktion $a : \mathfrak{Ord} \to V$ heißt **transfinite Folge** und wir schreiben auch $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{Ord}}$ dafür. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ wird gesetzt: $a_\alpha := a(\alpha)$.

1.6 Kardinalzahlen

Wir erinnern uns an unser bereits in Bemerkung 1.3.7 angeklungenes ursprüngliches Ziel, geeignete Repräsentanten für alle Mächtigkeiten zu finden.

Definition 1.6.1 (Kardinalzahl)
Eine Ordinalzahl κ heißt **Anfangsordinal** oder **Kardinalzahl**, wenn für alle $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ gilt:

$$\alpha < \kappa \implies |\alpha| < |\kappa|.$$

Die Klasse aller Kardinalzahlen bezeichnen wir mit $\mathfrak{Kard}$.

Lemma 1.6.2 Die von-Neumann-Zahlen ω sind Kardinalzahlen.

Beweis. Die Zahl 0 ist offensichtlich eine Kardinalzahl. Sei $\alpha < \beta \in \omega$. Da β endlich ist und $\alpha \subsetneq \beta$ aufgrund der Transitivität der Ordinalzahlen gilt, gibt es keine surjektive Abbildung $s : \alpha \to \beta$ und daher ist $|\alpha| < |\beta|$ und β somit eine Kardinalzahl. $\square$

[36]Man hätte hier auch $F(\alpha + 1) = N(F|_{\alpha+1})$ nehmen können, dann wäre es allerdings nicht mehr so glasklar, dass wir es wirklich mit einer Verallgemeinerung der vollständigen Induktion zu tun haben.

Satz 1.6.3 Die von-Neumann-Zahlen ω sind die einzigen Kardinalzahlen, die Nachfolger sind.

Beweis. Wäre es nicht so, gäbe es eine unendliche Kardinalzahl κ mit $\kappa = \beta + 1$ für ein $\beta \in \mathfrak{Ord}$. Definiere Funktion $g : \beta \to \beta + 1 = \kappa$ durch

$$g(\gamma) := \begin{cases} \gamma, & \text{falls } \gamma \in \kappa \backslash \omega, \\ \beta, & \text{falls } \gamma = 0, \\ \psi, & \text{falls } \gamma = \psi + 1 \in \omega. \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich surjektiv und damit gilt $|\beta| \geq |\beta+1|$. Außerdem lässt sich β kanonisch in $\beta+1$ einbetten, so dass mit Cantor-Bernstein (siehe 1.3.4) $|\beta| = |\beta+1| = |\kappa|$ folgt, ein Widerspruch zur Kardinalitätseigenschaft von κ. □

Bemerkung 1.6.4 Die Frage ist nun, ob wir jeder Menge nun eine Kardinalzahl zuweisen können, also ob gilt

$$\forall m \in V : \exists \kappa \in \mathfrak{Kard} : |m| = |\kappa|.$$

Wenn das ginge, wäre diese Zuordnung offensichtlich eindeutig, da zwei verschiedene Kardinalzahlen nicht gleichmächtig sein können. Man könnte nun eine Mächtigkeitsabbildung

$$\|.\| : V \to \mathfrak{Kard}$$

definieren, die jeder Menge m die eindeutige Kardinalzahl κ zuordnet mit $|m| = |\kappa| = |\,\|m\|\,|$ und wir wären an unserem Ziel angelangt, kanonische Vertreter für Mächtigkeiten zu finden.

Diese Zuordnung würde aber indirekt auf jeder Menge eine Wohlordnung induzieren und daher ist die Frage, ob wir jeder Menge eine Kardinalzahl zuordnen können, äquivalent zum Wohlordnungssatz („*jede Menge kann wohlgeordnet werden*“), welcher seinerseits, wie wir in Kapitel 2 sehen werden, äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Bleiben wir also in $\mathcal{ZF}$, so müssen wir die oben gestellte Frage verneinen, lassen wir das Auswahlaxiom hingegen zu, können wir sie bejahen.

Unter diesem Gesichtspunkt ist es jedoch weiterhin interessant, die Frage zu stellen, ob wir *ohne* Auswahlaxiom überhaupt beliebig große Kardinalzahlen bekommen, also solche, die nicht durch eine beliebig große gegebene Menge m in ihrer Mächtigkeit beschränkt werden. Diese Frage beantwortet der nächste Satz.

Satz 1.6.5 (Satz von Hartogs)
Definiere die sogenannte *Funktion von Hartogs* $H : V \to \mathfrak{Ord}$ durch

$$H(m) := \{\alpha \in \mathfrak{Ord} \mid |\alpha| \leq |m|\}.$$

Dann ist $H(m)$ die kleinste Kardinalzahl mit $|H(m)| \not\leq |m|$[37]. Wir nennen $H(m)$ auch die *Hartogszahl* von m.

Beweis. Für endliche Mengen e ist $H(e)$ offensichtlich eine Kardinalzahl, da $H(e)$ eine transitive, wohlgeordnete Menge ist und damit eine endliche Ordinalzahl. Wir haben bereits mit Beispiel 1.5.5 gesehen, dass $H(m)$ eine Menge ist (für endliche Mengen m ist dies klar.) Wäre nun $|H(m)| \leq |m|$, so wäre $H(m) \in H(m)$, ein Widerspruch, da keine Menge sich selbst enthält.

Weiterhin haben wir in demselben Beispiel gesehen, dass $H(m)$ eine Limesordinalzahl für unendliche Mengen m ist. Wir nehmen jetzt an, dass $H(m)$ keine Kardinalzahl ist. Dann gäbe es ein $\alpha < H(m)$ mit $|\alpha| = |H(m)|$. Also ist $\alpha \in H(m)$ und damit $|\alpha| \leq |m|$. Das ist ein Widerspruch wegen

$$|H(m)| = |\alpha| \leq |m| \not\geq |H(m)|.$$

Daher ist $H(m)$ eine Kardinalzahl. Sei zum Abschluss noch $\kappa \in \mathfrak{Kard}$ mit

$$|m| \not\geq |\kappa| < |H(m)|.$$

[37] Wir müssen hier diese etwas umständlich wirkende Formulierung benutzen, da $|H(m)| > |m|$ impliziert, dass es eine injektive Funktion $f : m \to H(m)$ gäbe, was ohne den Vergleichbarkeitssatz (siehe Folgerung 2.3.2), der nur in $\mathcal{ZFC}$ gilt, nicht bewiesen werden kann.

Dann ist $\kappa \in H(m)$ und damit $|\kappa| \leq |m|$, ein Widerspruch. $\square$

Definition 1.6.6 (Nachfolgerkardinalzahl)
Sei $\kappa \in \mathfrak{Kard}$. Wir setzen

$$\kappa^+ := \min\{\nu \in \mathfrak{Kard} \mid \kappa < \nu\}$$

und nennen κ^+ die Nachfolgerkardinalzahl von κ.

Folgerung 1.6.7 Für jede Kardinalzahl κ gilt:

$$\kappa^+ = H(\kappa).$$

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz von Hartogs (1.6.5). $\square$

Satz 1.6.8 Sei $K \subseteq \mathfrak{Kard}$ eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist auch $\bigcup K$ eine Kardinalzahl.

Beweis. Wie wir bereits in Folgerung 1.4.22 gesehen haben, ist $\bigcup K$ eine Ordinalzahl. Angenommen, es gäbe ein $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ mit $|\alpha| = |\bigcup K|$, aber $\alpha < \bigcup K$. Dann ist $\alpha \in \bigcup K$, also gibt es ein $\kappa \in K$ mit $\alpha \in \kappa$. Da κ eine Kardinalzahl ist, gilt

$$|\alpha| < |\kappa| \leq |\bigcup K| = |\alpha|,$$

ein Widerspruch. $\square$

Definition 1.6.9 (Aleph-Notation der Kardinalzahlen)
Wir definieren transfinit rekursiv eine transfinite Folge $\aleph : \mathfrak{Ord} \to \mathfrak{Kard}$ gemäß

$$\begin{aligned} \aleph_0 &:= \omega, \\ \aleph_{\alpha+1} &:= H(\aleph_\alpha), \\ \aleph_\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha, \end{aligned}$$

mit $\alpha, \lambda \in \mathfrak{Ord}$ und λ Limes.

Satz 1.6.10 (Jede unendliche Kardinalzahl ist ein Aleph)
Sei $\kappa \in \mathfrak{Kard}\backslash\omega$. Dann gibt es ein $\nu \in \mathfrak{Ord}$ mit

$$\kappa = \aleph_\nu.$$

Beweis. Wir benutzen transfinite Induktion, indem wir zeigen, dass für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ jede unendliche Kardinalzahl κ mit $|\kappa| < |\aleph_\alpha|$ in $\{\aleph_\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ liegt.

Sei $\alpha = 0$. Da es keine kleineren unendlichen Kardinalzahlen als ω gibt, ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt.

Sei nun $\alpha = \gamma + 1$. Wie wir bereits in 1.6.5 gesehen haben, definiert $H(\gamma)$ die kleinste Kardinalzahl, die echt größer als γ ist. Damit gibt es zwischen $\aleph_\gamma$ und $\aleph_{\gamma+1} = \aleph_\alpha$ keine weiteren Kardinalzahlen.

Sei nun λ ein Limes. Angenommen es gäbe eine Kardinalzahl κ mit $|\kappa| < |\aleph_\lambda|$, die nicht in $\{\aleph_\beta \mid \beta \leq \lambda\}$ liegt. Dann würde κ aufgrund seiner Eigenschaft als Ordinalzahl in $\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$ liegen und es gäbe ein $\alpha < \lambda$ so, dass $\kappa \in \aleph_\alpha$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung, die besagt, dass $\kappa \in \{\aleph_\beta \mid \beta \leq \alpha\} \subseteq \{\aleph_\beta \mid \beta \leq \lambda\}$ gilt. $\square$

Bemerkung 1.6.11 (Kontinuumshypothese)
Wir benutzen die Gelegenheit, um auf die allgemeine Kontinuumshypothese, abgekürzt $\mathcal{GCH}$, aufmerksam zu machen, die besagt, dass

$$\forall \alpha \in \mathfrak{Ord} : \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Gödel und Cohen konnten zeigen, dass $\mathcal{GCH}$ von $\mathcal{ZFC}$ unabhängig ist, also weder bewiesen, noch widerlegt werden kann innerhalb von $\mathcal{ZFC}$. Die ursprüngliche Frage, die Hilbert stellte, war: gibt es eine Menge M so, dass $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$ gilt? Die Nichtexistenz einer solchen Menge ist auch als *einfache* Kontinuumshypothese bekannt.

Kapitel 2

Einige zum Auswahlaxiom äquivalente Aussagen

„The Axiom of Choice is obviously true, the Well–ordering theorem is obviously false; and who can tell about Zorn's Lemma?“

Jerry Bona

2.1 Einige offensichtliche Äquivalenzen

Hier wollen wir ein paar äquivalente Formulierungen von $\mathcal{AC}$ beweisen, die vielleicht nicht jedem bekannt sind, aber dennoch sehr leicht aus demselben folgen.

Satz 2.1.1 (Äquivalenz zur Auswahl disjunkter Mengen)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathcal{AC}$,
2. Für jede Menge A nichtleerer Mengen mit $x \cap y = \emptyset \ \forall x, y \in A$ existiert eine Auswahlfunktion $f : A \to \bigcup_{a \in A} a$ so, dass $\forall a \in A : f(a) \in a$.
3. Für jede Menge A nichtleerer Mengen mit $x \cap y = \emptyset \ \forall x, y \in A$ und $(\bigcup A) \cap A = \emptyset$ existiert eine Auswahlfunktion $f : A \to \bigcup_{a \in A} a$, so dass $\forall a \in A : f(a) \in a$.

Beweis. „1. $\Longrightarrow$ 2.“: Klar.
„1. $\Longleftarrow$ 2.“: Sei A eine beliebige Menge nichtleerer Mengen Definiere die disjunkte Vereinigung

$$\bigsqcup A := \bigcup_{a \in A} a \times \{a\}.$$

Nun gibt es wegen 2. eine Auswahlfunktion f auf $\bigsqcup A$. Bezeichne π_1 die Koordinatenfunktion der ersten Koordinate auf $\bigsqcup A$. Definiere

$$\tilde{f} : A \to \bigcup_{a \in A} a, \ \ \tilde{f}(a) := \pi_1(f(a \times \{a\}))$$

Dann ist wegen $f(a \times \{a\}) \in a \times \{a\}$ auch $\pi_1(f(a \times \{a\})) \in a$ und wir haben eine Auswahlfunktion auf A. „2. $\Longrightarrow$ 3.“: Klar.
„2. $\Longleftarrow$ 3.“: Sei A eine Menge nichtleerer disjunkter Mengen. Definiere die Menge

$$\tilde{A} := \{\{\emptyset\} \times a \mid a \in A\}.$$

Da die Elemente von A disjunkt sind, sind es auch die Elemente von $\tilde{A}$.
Aufgrund der Eigenschaft $\{\emptyset\} \times a \notin \{\emptyset\} \times b$ für $a, b \in A$ verschieden (siehe Beispiel 1.1.6) haben wir $\bigcup \tilde{A} \cap \tilde{A} = \emptyset$. Gäbe es nämlich ein $a \in b \in \tilde{A}$ mit $a \in \tilde{A}$, hätten wir $a, b \in \tilde{A}$ und $a \in b$, ein Widerspruch.

Daher gibt es wegen 3. eine Auswahlfunktion $f : \tilde{A} \to \bigcup \tilde{A}$. Definiere die Funktion $F : A \to \bigcup A$ gemäß

$$F(a) = \pi_2(\underbrace{\underbrace{f(\{\emptyset\} \times a)}_{\in\{\emptyset\}\times a})}_{\in a}).$$

Dies ist eine Auswahlfunktion auf A und es folgt 2.

$\square$

Satz 2.1.2 (Äquivalenz zur nichtleeren Produktmenge)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathcal{AC}$,
2. Sei I eine beliebige Indexmenge und seien A_i nichtleere Mengen für jedes $i \in I$. Dann gilt

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Beweis. „1. $\Longrightarrow$ 2.“: Sei $F : \{\{A_i\} \mid i \in I\} \to \{A_i \mid i \in I\}$ eine Auswahlfunktion mit $F(i) \in A_i\ \forall i \in I$. Dann ist

$$(F(A_i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i.$$

„1. $\Longleftarrow$ 2.“ Sei A eine Menge nichtleerer Mengen. Dann ist wegen 2. die Menge

$$\prod_{a \in A} a$$

nichtleer, wir können also mit dem Fundierungsaxiom ein Element $F \in \prod_{a \in A} a$ herausgreifen. Damit ist $(F(a))_{a \in A}$ aber genau eine Auswahlfunktion auf A wegen $F(a) \in a\ \forall a \in A$. $\square$

2.2 Das Lemma von Zorn

Dieses berühmte Lemma wurde 13 Jahre vor Max Zorns Beweis bereits 1922 vom polnischen Mathematiker Kazimierz Kuratowski bewiesen, weshalb es auch als Lemma von Kuratowski-Zorn bekannt ist. Bevor wir mit dem Beweis der Äquivalenz beginnen, rufen wir einige Definitionen in Erinnerung.

Definition 2.2.1 (Halbordnung)
Sei M eine beliebige Menge und $\leq$ eine Relation auf M. Dann heißt $\leq$ **Halbordnung**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in M : \quad & a \leq a && \textit{(Reflexivität)},\\ & a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c && \textit{(Transitivität)},\\ & a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b && \textit{(Antisymmetrie)}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen das Tupel $(M, \leq)$ auch kurz als Halbordnung. Wir definieren noch

$$a < b \ :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow}\ (a \leq b \wedge a \neq b).$$

Definition 2.2.2 (Kette)
Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung. Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt **Kette** von M, wenn gilt:

$$\forall a, b \in K : a \leq b \vee b \leq a.$$

Wenn M selbst eine Kette ist, spricht man auch von einer **totalen Ordnung**.

Definition 2.2.3 (obere Schranke)
Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung und sei $T \subseteq M$. Dann heißt $s \in M$ **obere Schranke** von T, wenn gilt:

$$\forall a \in T : a \leq s.$$

Definition 2.2.4 (maximales Element)
Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung. Ein Element $m \in M$ heißt **maximal**, wenn gilt:

$$\forall a \in M : m \leq a \Rightarrow a = m.$$

Wir wollen jetzt die Äquivalenz des Lemmas von Zorn mit dem Auswahlaxiom beweisen, wobei die Beweisidee aus [Wikc] entnommen ist.

Satz 2.2.5 (Lemma von Zorn)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Jede halbgeordnete Menge M, deren Ketten nach oben beschränkt sind, hat ein maximales Element (Lemma von Zorn),
2. $\mathcal{AC}$.

Beweis. „1. $\Longrightarrow$ 2.“: Sei A eine Menge nichtleerer Mengen. Wir haben in 1.1.11 bereits gesehen, dass wir auf jeder endlichen Teilmenge von A eine Auswahlfunktion definieren können. Einen Schritt weiter gehend können wir sogar die Menge

$$M := \{f \subseteq A \times \bigcup A \mid f \text{ ist Abbildung und } \forall a \in \operatorname{dom}(f) : f(a) \in a\}$$

aller Auswahlfunktionen auf (beliebigen) Teilmengen von A definieren. M ist halbgeordnet durch $\subseteq$ und es gilt für alle $f, g \in M$:

$$f \subseteq g \Longleftrightarrow \forall a \in \operatorname{dom}(f) : (a \in \operatorname{dom}(g)) \wedge (f(a) = g(a) \in a).$$

Sei nun $K \subseteq M$ eine Kette von M. Wir wollen jetzt eine obere Schranke von K finden. Mit dem Vereinigungsaxiom (siehe 1.1.1) können wir

$$S := \bigcup K$$

definieren. Wir zeigen, dass S in M liegt. Seien dazu $(a, \alpha), (a, \beta) \in S$. Dann gibt es $f, g \in K$ mit $(a, \alpha) \in f$ und $(a, \beta) \in g$. Da K eine Kette ist, gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \subseteq g$. Daher ist $f(a) = g(a)$ und also $\alpha = \beta$. Also ist S eine Abbildung. Wegen $S(a) = f(a) \in a$ haben wir $S \in M$.

Wäre nun S keine obere Schranke von K, so gäbe es ein $f \in K$ so, dass $f \not\subseteq S$ gilt. Also gäbe es ein $(a, \alpha) \in f \in K$, das nicht in S liegt. Dies ist ein Widerspruch, da S ja per Definition alle Elemente der Elemente von K enthält.

Wir haben also gezeigt, dass jede Kette in M eine obere Schranke besitzt. Dann folgt aus 1., dass es ein maximales Element m in M gibt. Angenommen, $\operatorname{dom}(m) \subsetneq A$. Sei dann $a \in A \backslash \operatorname{dom}(m)$. Wähle mit dem Fundierungsaxiom ein beliebiges $\alpha \in a$. Dann liegt die Menge

$$\tilde{m} := m \cup \{(a, \alpha)\}$$

in M und ist ein echt größeres Element als m, was der Maximalität von m widerspricht. Also haben wir mit m eine Auswahlfunktion auf A gefunden und es folgt 2.

„2. $\Longrightarrow$ 1.“: Angenommen, 1. gilt nicht. Dann gäbe es eine Halbordnung $(M, \leq)$ so, dass jede Kette eine obere Schranke besitzt und M aber kein maximales Element enthält. Wir definieren für jede Kette K von M die Menge

$$S_K := \{s \in M \mid s \text{ ist obere Schranke von } K\}.$$

Angenommen, wir hätten $S_K \subseteq K$ für eine Kette K von M. Sei $s \in S_K$, also ist

$$\forall k \in K : k \leq s. \quad (\star)$$

Dann wäre s maximal, denn $\forall m \in M$:

$$s \leq m \overset{(\star)}{\Longrightarrow} m \in S_K \xrightarrow{S_K \subseteq K} m \in K \xrightarrow{s \in S_K} m \leq s \xrightarrow{s \leq m} s = m,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also gibt es keine Kette K, für die gilt $S_K \subseteq K$. Also ist

$$A := \{S_K \backslash K \mid K \text{ ist Kette von } M\}$$

eine Menge nichtleerer Mengen. Mit 2. bekommen wir nun eine Auswahlfunktion $\tilde{F}$ auf A. Sei

$$C := \{K \subseteq M \mid K \text{ ist Kette}\}$$

und definiere $F : C \to M$ gemäß

$$F(K) := \tilde{F}(S_K \backslash K).$$

Diese Funktion ordnet also jeder Kette in M eine obere Schranke von K zu, die nicht in K liegt. Nun definieren wir durch transfinite Rekursion (siehe 1.5.8) eine Folge von Elementen aus M und zeigen, dass die Zusammenfassung aller dieser Folgenglieder zu groß ist, um eine Menge zu sein. Sei dazu K eine beliebige Kette. Definiere $G : V \to V$ gemäß

$$G(m) = \begin{cases} F(K) & \text{falls } m = \emptyset, \\ F(\mathrm{Im}(m)) & \text{falls } m \text{ Funktion mit } \mathrm{Im}(m) \in C, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann können wir eine Funktion $a : \mathfrak{Ord} \to V$ so transfinit rekursiv definieren, dass[1]

$$\begin{aligned} a_0 &= G(a\big|_{\emptyset}) = G(\emptyset) = F(K), \\ a_\alpha &= G(a\big|_{\alpha}) = F(\mathrm{Im}(a\big|_{\alpha})) = F(\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}) \; \forall \alpha \in \mathfrak{Ord} \backslash \{0\} \end{aligned}$$

ist. Nun zeigen wir noch durch transfinite Induktion über β, dass

$$\forall \alpha \in \mathfrak{Ord} : \alpha < \beta \implies a_\alpha < a_\beta.$$

Für $\beta = 0$ ist nichts zu zeigen, da es keine Ordinalzahl kleiner 0 gibt. Sei jetzt also $\beta \neq 0$ und gelte die Behauptung für alle $\alpha < \beta$. Wir wollen zeigen, dass die Aussage dann auch für β gilt. Sei $\alpha \in \mathfrak{Ord}, \ \alpha < \beta$ beliebig. Wir wissen, dass

$$a_\beta = F(\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}) \in S_{\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}} \backslash \underbrace{\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}}_{a_\alpha \in},$$

also kann nicht $a_\beta = a_\alpha$ gelten. Da a_β aber auch eine obere Schranke für $\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}$ ist, haben wir $a_\alpha < a_\beta$ gezeigt und der induktive Beweis ist erbracht.

Nun können wir eine Abbildung $I : \mathfrak{Ord} \to \mathrm{Im}(a) =: W \subseteq M$ definieren, gemäß $I(\alpha) := a_\alpha$. Diese Abbildung ist injektiv, wie wir gerade gezeigt haben, und aufgrund der Definition surjektiv. Wir können also die Umkehrabbildung I^{-1} betrachten. Da $W \subseteq M$ gilt, W also eine Menge ist, können wir das Ersetzungsaxiom auf I^{-1} und W anwenden und erhalten die Menge

$$I^{-1}(W) \subseteq \mathfrak{Ord}.$$

Das ist aber wegen der Bijektivität von I genau die echte Klasse $\mathfrak{Ord}$ aller Ordinalzahlen und damit keine Menge, wie wir beim Paradoxon von Burali-Forti (siehe 1.4.25) gesehen haben. Damit haben wir einen Widerspruch und es folgt 1.

[1]Siehe auch Definition 1.5.10.

□

2.3 Der Wohlordnungssatz

Im folgenden Abschnitt wenden wir uns einem der Anfang des 20. Jahrhunderts heißdiskutiertesten Sätze der Mathematik zu. Seine Kritiker bemängelten dabei vor allem, dass sie sich keine wie auch immer geartete Wohlordnung auf den reellen Zahlen vorzustellen vermochten. Der Beweis in diesem Abschnitt folgt einer eigenen Idee.

Satz 2.3.1 (Wohlordnungssatz)
Die folgenden Aussagen sind in $\mathcal{ZF}$ äquivalent:

1. Jede Menge kann wohlgeordnet werden,
2. $\mathcal{AC}$.

Beweis. „1. $\Longrightarrow$ 2.“: Sei A eine beliebige Menge nichtleerer Mengen. Dann existiert mit 1. eine Wohlordnung $\leq$ auf $\bigcup A$. Definiere die Funktion $F : A \to \bigcup A$ gemäß

$$F(a) := \min a.$$

Dies ist eine Auswahlfunktion auf A.

„2. $\Longrightarrow$ 1.“: Sei M eine beliebige, nichtleere Menge und sei $\tilde{F} : \mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\} \to M$ eine Auswahlfunktion. Definiere $F : \mathcal{P}(M) \to M \cup \{M\}$ gemäß

$$F(m) := \begin{cases} \tilde{F}(m) & \text{falls } m \in \mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\}, \\ M & \text{falls } m = \emptyset. \end{cases}$$

Definiere nun mit transfiniter Rekursion eine transfinite Folge $a : \mathfrak{Ord} \to M \cup \{M\}$ durch[2]

$$a_\alpha := F\left(M\backslash \operatorname{Im}\left(a\big|_\alpha\right)\right).$$

Wir haben also $a_0 = F(M),\ a_1 = F(M\backslash\{a_0\}),\ a_2 = F(M\backslash\{a_0, a_1\})$... und so weiter. Wir zeigen nun durch transfinite Induktion (ohne Fallunterscheidung) über β, dass stets falls $a_\beta \neq M$ ist, $a_\alpha \neq a_\beta$ für alle $\alpha < \beta$ gilt. Sei $\beta \in \mathfrak{Ord}$ beliebig und $a_\beta \neq M$. Sei $\alpha < \beta$, dann ist

$$a_\beta = F\left(M\backslash \operatorname{Im}\left(a\big|_\beta\right)\right) = F(M\backslash\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}) \overset{(*)}{=} \tilde{F}(M\backslash\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}) \in M\backslash \underbrace{\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}}_{a_\alpha \in}.$$

Zu $(*)$: Da wir $a_\beta \neq M$ haben, kann nicht $M\backslash\{a_\gamma \mid \gamma < \beta\} = \emptyset$ sein. Also ist $a_\alpha \neq a_\beta$ und die Aussage gilt für alle $\beta \in \mathfrak{Ord}$. Setze[3]

$$z := \min\{\alpha \in \mathfrak{Ord} \mid a_\alpha = M\}.$$

Dieses muss existieren, da wir andernfalls mit der eben bewiesenen Tatsache eine Bijektion

$$a : \mathfrak{Ord} \to \operatorname{Im}(a) \subseteq M \in V$$

hätten; ein Widerspruch, da $\mathfrak{Ord}$ keine Menge ist nach Burali-Forti.

Zum Abschluss zeigen wir noch:

$$\{a_\alpha \mid \alpha < z\} = M.$$

Wäre es nicht so, wäre $M\backslash\{a_\alpha \mid \alpha < z\} \neq \emptyset$ und wir hätten

$$M = a_z = \tilde{F}(M\backslash\{a_\alpha \mid \alpha < z\}) \in M,$$

[2] In diesem Fall ist $G(m) := F(M\backslash \operatorname{Im}(m))$, falls m eine Funktion ist.
[3] $\mathfrak{Ord}$ ist wohlgeordnet, siehe 1.4.26.

ein Widerspruch, da keine Menge sich selbst enthält. Also haben wir eine durch die Bijektion

$$a\big|_z : z \to M$$

induzierte Wohlordnung auf M gefunden.

□

Folgerung 2.3.2 (Vergleichbarkeitssatz)
Seien A und B beliebige Mengen. Dann gilt in $\mathcal{ZFC}$

$$|A| \leq |B| \ \vee \ |A| \geq |B|.$$

Beweis. Wir können A und B wohlordnen mit dem vorherigen Satz. Mit der Trichotomie der Wohlordnungen in 1.4.13 gibt es ein $a \in A$ oder ein $b \in B$ so, dass

$$A_a \simeq B \ \vee \ A \simeq B_b \ \vee \ A \simeq B$$

gilt. Falls $A \simeq B$ gilt, haben wir eine Bijektion zwischen A und B gefunden und also gilt $|A| = |B|$. Falls $A \not\simeq B$ gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \simeq B_b$ mit $\phi : A \to B_b$. Damit haben wir eine Injektion $\tilde{\phi} : A \to B$ gefunden und es gilt $|A| \leq |B|$. □

Folgerung 2.3.3 (Mächtigkeitsabbildung)
Es gibt eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $\|.\| : V \to \mathfrak{Kard}$ mit $|M| = |\,\|M\|\,| \ \forall M \in V$. Wir können auf diese Weise also jeder Menge eine Kardinalzahl zuweisen, die gleichmächtig zu der Menge ist.

Beweis. Wenn es so eine Funktion gibt, ist sie eindeutig, denn zwei unterschiedliche Kardinalzahlen sind nie gleichmächtig. Zur Existenz. Sei M eine beliebige Menge, die mit dem Wohlordnungssatz wohlgeordnet werde. Dann gibt es wegen 1.4.23 genau eine Ordinalzahl α mit $\alpha \simeq M$, also $|\alpha| = |M|$. Setze dann

$$\|M\| := \min\{\beta \in \mathfrak{Ord} \mid |\beta| = |\alpha|\} \in \mathfrak{Kard}$$

und wir sind fertig. □

Bemerkung 2.3.4 Wir werden in Zukunft die Funktion $\|.\|$ nur dann als die Mächtigkeitsabbildung interpretieren, wenn es explizit genannt wird, damit keine Verwechslungen mit Normen auftreten können.

2.4 Der Satz von König

Um die Formulierung des Satzes verstehen zu können, benötigen wir vorher noch einige Definitionen zu Kardinalzahlen. In diesem gesamten Abschnitt zum Satz von König wollen wir das Symbol $\|.\|$ als die Mächtigkeitsabbildung interpretieren.

Definition 2.4.1 (Summe und Produkt von Kardinalzahlen)
Sei I eine Indexmenge und $(\kappa_i)_{i\in I}$ eine Familie von Kardinalzahlen, sowie $(A_i)_{i\in I}$ eine Folge von disjunkten Mengen so, dass $\|A_i\| = \kappa_i \ \forall i \in I$ gilt. Dann definiere

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \left\| \bigcup_{i\in I} A_i \right\| \in \mathfrak{Kard}.$$

Mit denselben Voraussetzungen, nur, dass die (A_i) nicht disjunkt zu sein brauchen, definiere

$$\prod_{i\in I} \kappa_i := \left\| \prod_{i\in I} A_i \right\| \in \mathfrak{Kard}.$$

Diese Definitionen sind repräsentantenunabhängig und damit wohldefiniert wie sich leicht nachweisen lässt, worauf wir aber an dieser Stelle verzichten wollen.

Bemerkung 2.4.2 Wir benutzen $\prod$ also sowohl für das Mengenprodukt, als auch für das Kardinalprodukt. Aus dem Kontext wird ersichtlich, was wann gemeint ist. Folgende Konvention gelte: wenn es sich um ein Produkt von Kardinalzahlen handelt, soll $\prod$ immer als das Kardinalzahlprodukt interpretiert werden, sonst als Mengenprodukt.

Satz 2.4.3 (Satz von König)
Sei I eine Indexmenge und seien $(\kappa_i)_{i\in I}$ und $(\mu_i)_{i\in I}$ Familien von Kardinalzahlen. Dann gilt

$$\forall i \in I : \kappa_i < \mu_i \quad \stackrel{\mathcal{AC}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \mu_i.$$

Beweis. Gelte $\forall i \in I : \kappa_i < \mu_i$. Angenommen die Behauptung gilt nicht, dann haben wir (siehe 2.3.2)

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \not< \prod_{i\in I} \mu_i \quad \stackrel{\mathcal{AC}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{i\in I} \kappa_i \geq \prod_{i\in I} \mu_i \quad \stackrel{\mathcal{AC}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \tilde{f} : \sum_{i\in I} \kappa_i \to \prod_{i\in I} \mu_i \text{ surjektiv}^4.$$

Seien $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ disjunkte Mengen so, dass $\forall i \in I : \|A_i\| = \kappa_i,\ \|B_i\| = \mu_i$ gilt und sei

$$f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$$

eine surjektive Funktion. Bezeichne π_i die i-te Koordinatenabbildung auf $\prod_{i\in I} B_i$. Es gilt für jedes $i \in I$

$$\pi_i(f(A_i)) \subseteq B_i \stackrel{\kappa_i<\mu_i}{\Longrightarrow} \pi_i(f(A_i)) \subsetneq B_i.$$

Betrachte die Menge nichtleerer Mengen

$$M := \{B_i \backslash \pi_i(f(A_i)) \mid i \in I\}$$

und sei $F : I \to \bigcup M$ mit $\mathcal{AC}$ eine Auswahl auf M mit $F(i) \in B_i\backslash\pi_i(f(A_i))\ \forall i \in I$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $f(a) = (F(i))_{i\in I}$. Da die A_i disjunkt sind, gibt es genau ein $i_0 \in I$ mit $a \in A_{i_0}$ und $f(a)_{i_0} \in \pi_{i_0}(f(A_{i_0}))$. Wir haben aber

$$\pi_{i_0}(f(A_{i_0})) \ni f(a)_{i_0} = F(i_0) \in B_{i_0}\backslash\pi_{i_0}(f(A_{i_0})),$$

ein Widerspruch. □

Bemerkung 2.4.4 Der Satz von König, wie er oben formuliert wurde, ist die verbreitetste Variante. Wir geben nun eine allgemeinere Version des Satzes von König.

Folgerung 2.4.5 (Satz von König (allgemeine Variante))
Sei I eine Indexmenge und seien $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_i)_{i\in I}$ Familien von Mengen. Dann gilt

$$\forall i \in I : |A_i| < |B_i| \quad \stackrel{\mathcal{AC}}{\Longrightarrow} \quad \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| < \left|\prod_{i\in I} B_i\right|.$$

Beweis. Mit $\mathcal{AC}$ können wir κ_i und μ_i finden mit $\kappa_i = \|A_i\|,\ \mu_i = \|B_i\|$ für jedes $i \in I$. Seien noch $(\tilde{A}_i)_{i\in I}$ disjunkte Mengen mit $|\tilde{A}_i| = |A_i|$ für jedes $i \in I$. Wir erhalten mit dem vorherigen Satz

$$\left\|\bigcup_{i\in I} A_i\right\| \leq \left\|\bigcup_{i\in I} \tilde{A}_i\right\| \stackrel{(Def)}{=} \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \mu_i \stackrel{(Def)}{=} \left\|\prod_{i\in I} B_i\right\|$$

und damit die Behauptung. □

Folgerung 2.4.6 Es sind äquivalent:

1. Der Satz von König (allgemeine Variante),

[4] Zur letzten Äquivalenz siehe auch 1.3.2

2. $\mathcal{AC}$.

Beweis. „1. $\Longleftarrow$ 2.“: Bereits gezeigt.
„1. $\Longrightarrow$ 2.“: Gelte der Satz von König und sei $A = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge nichtleerer Mengen. Dann ist für jedes $a \in A$ die Beziehung $|\emptyset| < |a|$ erfüllt, weil $\emptyset$ eine injektive Funktion von $\emptyset$ nach a ist, es aber keine surjektive Funktion von $\emptyset$ nach a gibt. Nun gilt mit 1.:

$$|\emptyset| = \left|\bigcup_{i\in I} \emptyset\right| < \left|\prod_{i\in I} A_i\right|.$$

Wäre nun $\prod_{i\in I} A_i$ leer, gäbe es eine Bijektion zwischen $\emptyset$ und $\prod_{i\in I} A_i$, ein Widerspruch. Da das Produkt also nichtleer ist, folgt mit 2.1.2 das Auswahlaxiom. □

2.5 Der Satz von Tychonoff

Wir werden diesen wichtigen Satz der Topologie mit Hilfe von Ultrafilterkonvergenz beweisen und wollen die Gelegenheit nutzen, um etwas Ultrafiltertheorie, die aus [Bar15] S. 40-46 entnommen wurde, einzuführen. Es gibt auch die Möglichkeit, den Satz mit Netzen zu beweisen, was man in [Ter14] nachlesen kann. Das später eingeführte Indexprodukt ist eine eigene Erfindung, die vorrangig der anschaulicheren Darstellung von Zylindermengen dienen soll.

Definition 2.5.1 (Filter)
Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Filter, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F},\ X \in \mathcal{F}$,
2. $B \supseteq A \in \mathcal{F} \implies B \in \mathcal{F}$,
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.

Die Menge aller Filter auf X bezeichnen wir als $\mathfrak{F}(X)$.

Definition 2.5.2 (Verfeinerung)
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}(X)$ Filter auf einer Menge X. Dann heiße $\mathcal{F}$ **Verfeinerung** von $\mathcal{G}$, falls $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ gilt.

Definition 2.5.3 (Ultrafilter)
Ein Filter $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(X)$, der bezüglich Verfeinerung maximal ist, heiße **Ultrafilter**.

Lemma 2.5.4 (Filterschranke)
Sei $F \subseteq \mathfrak{F}(X)$ eine nichtleere Menge von Filtern, wovon einer jeweils eine Verfeinerung des anderen darstelle (F sei durch Mengeninklusion total geordnet). Dann ist

$$S(F) := \bigcup F \in \mathfrak{F}(X).$$

Beweis. Wir überprüfen die Filtereigenschaften. Offensichtlich ist $\emptyset \notin S(X)$ und $X \in S(X)$. Sei $B \supset A \in S(F)$. Dann liegt A in einem der Filter von F, nennen wir ihn $\mathcal{F}$. Dann ist aber auch $B \in \mathcal{F}$, wegen der Filterdefinition und damit auch $B \in S(F)$. Seien zum Abschluss noch $A, B \in S(F)$. Dann gibt es $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F$ mit $A \in \mathcal{F}_1$ und $B \in \mathcal{F}_2$. Wegen der totalen Ordnung von F sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathcal{F}_1$ eine Verfeinerung von $\mathcal{F}_2$. Also ist $A, B \in \mathcal{F}_1$ und damit auch $A \cap B \in \mathcal{F}_1$. Also gilt $A \cap B \in S(F)$. □

Bemerkung 2.5.5 Die nächste Folgerung gilt nur, wenn wir $\mathcal{AC}$ voraussetzen, da wir das Lemma von Zorn im Beweis benutzen werden. Sie spielt eine wichtige im Rolle im Zusammenhang mit logischen Fragestellungen, die wir im letzten Kapitel näher erörtern werden.

Folgerung 2.5.6 (Ultrafilterlemma)
Sei X eine Menge. Für jedes $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(X)$ gibt es ein bezüglich Verfeinerung maximales Element, also ein $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(X)$ so, dass

$$\forall \mathcal{G} \in \mathfrak{F}(X) \text{ mit } \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F} : \mathcal{U} \supseteq \mathcal{G}$$

gilt.

Wir kürzen das Ultrafilterlemma mit $\mathcal{UF}$ ab[5].

Beweis. Die Menge G aller Verfeinerungen von $\mathcal{F}$ bilden eine Halbordnung bezüglich $\supseteq$ und wir haben im vorherigen Satz gesehen, dass jede Kette $F \subseteq G$ nach oben durch $S(F)$ beschränkt ist. Dann gibt es nach dem Lemma von Zorn ein maximales $\mathcal{U} \in G$. $\square$

Definition 2.5.7 (freie und fixierte Ultrafilter)
Sei $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(X)$ ein Ultrafilter. Wenn gilt

$$\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$$

so heißt $\mathcal{U}$ frei, andernfalls fixiert.

Bemerkung 2.5.8 Wir haben in Folgerung 2.5.6 gesehen, dass jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist, wenn wir $\mathcal{AC}$ zulassen.

Satz 2.5.9 (Ultrafiltereigenschaften)
Sei $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(X)$ gegeben. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathcal{U}$ ist Ultrafilter,
2. $\forall a \subseteq X :$ entweder $a \in \mathcal{U}$ oder $a \backslash A \in \mathcal{U}$,
3. $\forall A \subseteq \mathcal{P}(X)$ endlich mit $\bigcup A \in \mathcal{U}$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \in \mathcal{U}$.

Beweis. „1. $\Longrightarrow$ 2.“: Angenommen, es gäbe ein $A \subseteq X$, das nicht die Eigenschaft 2. erfüllt. Wir können sofort den Fall ausschließen, dass beide Teile von 2. erfüllt sind, da sonst $a \cap (X\backslash a) = \emptyset \in \mathcal{U}$ gelten würde.

Gelte also nun $a \notin \mathcal{U}$ und $X\backslash a \notin \mathcal{U}$. Wir zeigen nun, dass wir gefahrlos entweder a oder $X\backslash a$ zu $\mathcal{U}$ hinzufügen können, ohne die Filtereigenschaft einzubüßen.

Nehmen wir zunächst an, dass uns beide Mengen bezüglich Durchschnittsbildung Probleme machen, das heißt es gibt $p, q \in \mathcal{U}$ so, dass $a \cap p = \emptyset$ und $(X\backslash a) \cap q = \emptyset$. Dann ist aber $p \cap q = \emptyset$, im Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathcal{U}$. Gelte also ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$a \cap p \neq \emptyset \ \forall p \in \mathcal{U}.$$

Wir können mit dieser Eigenschaft auch alle $b \supset a$ zu $\mathcal{U}$ hinzufügen, ohne dass wir einen leeren endlichen Durchschnitt mit Filterelementen riskieren und damit lässt sich der durch $\mathcal{U} \cup \{a\}$ erzeugte Filter betrachten, der echt feiner als $\mathcal{U}$ ist, und somit 1. widerspricht. Also ist 2. erfüllt.

„2. $\Longrightarrow$ 3.“: Angenommen, es gibt ein A, für das 3. verletzt ist. Dann ist wegen 2. $X\backslash a \in \mathcal{U} \ \forall a \in A$ und daher auch

$$\mathcal{U} \ni \bigcap_{a \in A} X\backslash a = X\backslash \bigcup_{a \in A} a = X\backslash \bigcup A$$

ein Widerspruch, da nach Voraussetzung auch $\bigcup A \in \mathcal{U}$ gilt und damit $\emptyset \in \mathcal{U}$ wäre.

„3. $\Longrightarrow$ 1.“: Wäre $\mathcal{U}$ kein Ultrafilter, gäbe es einen Filter U, der echt feiner als $\mathcal{U}$ wäre. Sei $u \in U\backslash\mathcal{U}$. Dann ist $X = u \cup X\backslash u \in \mathcal{U}$ und daher ist u oder $X\backslash u$ in $\mathcal{U}$. Wäre $X\backslash u$ darin, wäre es auch in U, womit wir $\emptyset = u \cap (X\backslash u) \in U$ hätten, was nicht sein kann. Also ist $u \in \mathcal{U}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\mathcal{U}$ Ultrafilter. $\square$

Beispiel 2.5.10 (Punktfilter)
Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist der Punktfilter $\mathfrak{U}(x) := \{B \subseteq X \mid x \in B\}$ ein fixierter Ultrafilter.

Beweis. Gäbe es ein $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(X)$ mit $\mathcal{U} \supsetneq \mathfrak{U}(x)$ nimm ein $u \in \mathcal{U}\backslash\mathfrak{U}(x)$. Dann muss $x \notin u$ gelten, also ist $X\backslash u \in \mathfrak{U}(x) \subset \mathcal{U}$ und also ist $\emptyset = u \cap (X\backslash u) \in \mathcal{U}$, ein Widerspruch. $\square$

[5]Im 4. Kapitel werden wir noch eine Verallgemeinerung des Ultrafilterlemmas kennenlernen, die aber in $\mathcal{ZF}$ äquivalent zu der hier vorgestellten Version ist. Dieses bezieht sich auf allgemeinere Strukturen, die sich Verbände nennen.

Definition 2.5.11 (Filterkonvergenz)
Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Man sagt ein Filter $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(X)$ **konvergiere** gegen x falls gilt

$$\mathcal{F} \supseteq \tau_x := \{\mathcal{O} \in \tau \mid x \in \mathcal{O}\}.$$

Wir schreiben dann auch kurz $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x$.

Bemerkung 2.5.12 Wenn der topologische Raum nicht hausdorffsch ist, muss die Filterkonvergenz nicht eindeutig sein.

Lemma 2.5.13 Sei alles so wie in der Definition der Filterkonvergenz und sei B eine Umgebungsbasis von x. Dann gilt

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x \iff \mathcal{F} \supseteq B.$$

Beweis. Wir müssen nur die Rückrichtung zeigen, die andere folgt direkt aus der Definition. Wir weisen nach, dass $\mathcal{F} \supseteq \tau_x$ gilt. Sei dazu $u \in \tau_x$. Da B eine Umgebungsbasis von x ist, gibt es ein $\emptyset \neq b \in B$ mit $b \subseteq u$. Wegen $\mathcal{F} \supseteq B$ folgt $b \in \mathcal{F}$ und da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, haben wir sofort $u \in \mathcal{F}$. $\square$

Definition 2.5.14 (Kompaktheit)
Ein topologischer Raum (X, τ) heiße **kompakt**, wenn jede Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Der nun folgende Satz stellt eine elegante Charakterisierung der Kompaktheit eines topologischen Raumes durch Ultrafilterkonvergenz dar, der den Kern des späteren Beweises vom Satz von Tychonoff bildet.

Satz 2.5.15 (Kompaktheit mit Ultrafilterkonvergenz)
Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann kompakt, wenn jeder seiner Ultrafilter konvergiert.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei X kompakt und sei $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(X)$ ein Ultrafilter. Wenn $\mathcal{U}$ nicht konvergiert, gibt es für jedes $x \in X$ ein $O_x \in \tau_x$ so, dass $O_x \notin \mathcal{U}$ ist. Wir haben

$$\bigcup_{x \in X} O_x = X \in \mathcal{U}.$$

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\{O_1, ..., O_n\}$, die X überdeckt. Wegen 2.5.9 3. gibt es dann ein $x' \in X$ mit $O_{x'} \in \mathcal{U}$, ein Widerspruch.

„$\Longleftarrow$“: Konvergiere nun jeder Ultrafilter auf X. Angenommen, es gibt eine Menge O von offenen Mengen mit $\bigcup O = X$, zu der es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Definiere die Menge

$$F = \left\{ X \backslash \bigcup E \mid E \subseteq O,\, E \text{ endlich} \right\}.$$

Wenn $A, B \in F$ sind, gibt es $E_1, E_2 \subseteq O$ endlich, so dass $A = X \backslash \bigcup E_1, B = X \backslash \bigcup E_2$ gilt. Dann ist

$$A \cap B = (X \backslash \bigcup E_1) \cap (X \backslash \bigcup E_2) = \underbrace{X \backslash \bigcup (E_1 \cup E_2)}_{\in F} \neq \emptyset$$

und wir können den durch F erzeugten Filter $\mathcal{F}$ betrachten. Dann gibt es mit dem Ultrafilterlemma in 2.5.6 einen Ultrafilter $\mathcal{U}$, der $\mathcal{F}$ enthält und aufgrund der Voraussetzung gegen ein $x \in X$ konvergiert. Also ist $\mathcal{U} \supseteq \tau_x$ und es gibt eine offene Menge $o \in O$ so, dass $x \in o$ gilt. Dementsprechend ist $o \in \mathcal{U} \supseteq \tau_x$. Es ist aber auch $X \backslash o \in F \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, ein Widerspruch, da wir sonst $\emptyset \in \mathcal{U}$ hätten. Also ist τ kompakt. $\square$

Der Satz von Tychonoff macht eine Aussage über die Kompaktheit eines durch die Produkttopologie erzeugten topologischen Raumes, daher erinnern wir in der folgenden Definition noch einmal daran, wie diese Topologie definiert wird.

Definition 2.5.16 (Produkttopologie)
Seien $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf dem Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ ist definiert als die gröbste Topologie

$$\tau \subseteq \mathcal{P}\left(\prod_{i \in I} X_i\right)$$

derart, dass

$$\forall i \in I \; \forall o \in \tau_i : \pi_i^{-1}(o) \in \tau$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ die kanonische Projektion und die obige Bedingung bedeutet, dass alle kanonischen Projektionen stetig sein sollen in der Produkttopologie.

Bemerkung 2.5.17 Wie wir in Satz 2.1.2 gesehen haben, muss ein Produkt nichtleerer Mengen nicht notwendigerweise nichtleer sein, wenn wir auf $\mathcal{AC}$ verzichten. Nun könnte man auf die Idee kommen zu fragen, ob es denn zulässig sei, die zu definieren, ohne auf das Auswahlaxiom zurückzugreifen, und ob damit nicht alle Sätze, die mit ihr hantieren, von $\mathcal{AC}$ gewissermaßen infiziert werden. An dieser Stelle passiert uns glücklicherweise jedoch gar nichts, da selbst wenn $\prod_{i \in I} X_i$ leer sein sollte, die Definition der Produkttopologie weiterhin Bestand hat. In diesem Fall sind die kanonischen Projektionen π_i leere Mengen (als leere Relationen aufgefasst), die Urbildmengen $\pi_i^{-1}(o) = \{a \in \prod_{i \in I} X_i \mid \pi_i(a) \in o\}$ sind dann auch leer und damit ist die Bedingung

$$\forall i \in I \; \forall o \in \tau_i : \pi_i^{-1}(o) \in \tau$$

erfüllt, solange τ wenigstens die leere Menge enthält. Damit ist $\tau = \{\emptyset\}$ und das Fehlen des Auswahlaxioms macht keine Probleme in der Anwendung dieser Definition.

Um notationelle Klarheit in der nächsten (und späteren) Definitionen zu schaffen, definieren wir ein neues Produktsymbol für Mengen, das wir Indexprodukt nennen.

Definition 2.5.18 (Indexprodukt)
Seien I_1, I_2 beliebige disjunkte Indexmengen und seien $(a_i)_{i \in I_1}, (b_i)_{i \in I_2}$ beliebige Mengen. Wir setzen

$$\prod_{i \in I_1} a_i \; \dot{\times} \; \prod_{i \in I_2} b_i := \{f : I_1 \cup I_2 \to \bigcup_{i \in I_1} a_i \cup \bigcup_{i \in I_2} b_i \mid \forall i \in I_1 : f(i) \in a_i, \forall i \in I_2 : f(i) \in b_i\}$$

und nennen das entstandene kartesische Mengenprodukt **Indexprodukt**.

Bemerkung 2.5.19 Wir stellen fest, dass das Indexprodukt kommutativ ist:

$$\prod_{i \in I_1} a_i \; \dot{\times} \; \prod_{i \in I_2} b_i = \prod_{i \in I_2} b_i \; \dot{\times} \; \prod_{i \in I_1} a_i.$$

Im Allgemeinen gilt

$$\prod_{i \in I_1} a_i \; \dot{\times} \; \prod_{i \in I_2} b_i \neq \prod_{i \in I_2} b_i \times \prod_{i \in I_1} a_i,$$

da links ein $I_1 \cup I_2$-stelliges Produkt steht und rechts ein 2-stelliges. Der Vorteil dieses neuen Produktes liegt nun darin, dass wir bei einem indexierten Mengenprodukt Teilmengen der Indexmenge herausgreifen und gesondert darstellen können. Nehmen wir beispielsweise an, bei dem Produkt $\prod_{i \in I} a_i$ interessieren uns nur die Einträge, die von $T \subseteq I$ indexiert werden. Dann können wir das Produkt aufschlüsseln zu

$$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \in I \setminus T} a_i \; \dot{\times} \; \prod_{i \in T} a_i.$$

Ist die Menge $T = \{k\}$ einelementig, können wir auch

$$\prod_{i \in I \setminus \{k\}} a_i \; \dot{\times} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{k-te Stelle}}}{a_k} \quad \text{oder wenn die Stelle klar ist, einfach} \quad \prod_{i \in I \setminus \{k\}} a_i \; \dot{\times} \; a_k$$

schreiben. Diese vereinfachte Notation kann man auch auf den Fall nichteinelementiger Mengen T verallgemeinern, wenn die Zuordnung klar ist, wie im nächsten Absatz beschrieben wird.

Mit Hilfe des Indexprodukts kann man auch Zylindermengen explizit aufschreiben, ohne über die kanonischen Projektionen gehen zu müssen. Haben wir nämlich $\prod_{i\in I} a_i$ gegeben und ist $T \subseteq I, b \in \prod_{i\in T} a_i$ und $\pi_T : A \to \prod_{i\in T} a_i$ die kanonische Projektion, so nennt man $\pi_T^{-1}(b)$ ein Zylindermenge, die wir nun auch so aufschreiben können:

$$\pi_T^{-1}(b) = \prod_{i\in I\setminus T} a_i \dot{\times} \prod_{i\in T}\{b_i\} = \prod_{i\in I\setminus T} a_i \dot{\times} \{b\}.$$

Die Indexproduktdarstellung soll hauptsächlich der anschaulicheren Beschreibung von Zylindermengen dienen.

Satz 2.5.20 (Projektionsfilter)
Seien $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $\mathcal{U}$ ein (Ultra-)Filter auf dem Produktraum $\prod_{i\in I} X_i$. Dann ist die Menge

$$\pi_i(\mathcal{U}) := \{\pi_i(u) \in \mathcal{P}(X_i) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

ein (Ultra-)Filter für jedes $i \in I$.

Beweis. Da $u \neq \emptyset \quad \forall u \in \mathcal{U}$, haben wir auch $\pi_i(u) \neq \emptyset \ \forall i \in I \ \forall u \in \mathcal{U}$. Seien $A, B \in \pi_i(\mathcal{U})$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ mit $\pi_i(u_1) = A, \pi_i(u_2) = B$. Da $\mathcal{U}$ ein Filter ist und damit abgeschlossen bezüglich Obermengen, liegen auch die Zylindermengen

$$\tilde{A} := \pi^{-1}(A) = \prod_{k\in I\setminus\{i\}} X_k \dot{\times} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-te Stelle}}}{A} \supseteq u_1 \text{ und } \tilde{B} := \pi^{-1}(B) = \prod_{k\in I\setminus\{i\}} X_k \dot{\times} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-te Stelle}}}{B} \supseteq u_2$$

in $\mathcal{U}$ und es gilt $D := \tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{U}$. Dann ist $\pi_i(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = A \cap B \in \pi_i(\mathcal{U})$. Sei $B \supseteq A \in \pi_i(\mathcal{U})$. Dann ist $\pi_i^{-1}(B) \supseteq \tilde{A}$ und daher $\pi_i^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ und folglich $B \in \pi_i(\mathcal{U})$. Also ist $\pi_i(\mathcal{U})$ ein Filter.

Sei $\mathcal{U}$ nun ein Ultrafilter und $A \subseteq X_i$. Dann ist wegen 2.5.9 entweder

$$\pi_i(A)^{-1} \in \mathcal{U} \text{ oder } \left(\prod_{i\in I} X_i\right) \setminus \pi_i(A)^{-1} \in \mathcal{U}.$$

Also haben wir auch entweder $A \in \pi_i(\mathcal{U})$ oder $X_i \setminus A \in \pi_i(\mathcal{U})$. Damit ist gezeigt, dass $\pi_i(\mathcal{U})$ ein Ultrafilter ist. $\square$

Nun beweisen wir einen der wichtigsten Sätze der Topologie und benutzen dafür auch das Auswahlaxiom. Die Beweisidee dafür stammt aus [Wika].

Satz 2.5.21 (Satz von Tychonoff)
Seien $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ kompakte topologische Räume. Dann ist auch $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$, mit τ Produkttopologie, ein kompakter topologischer Raum.

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung der Kompaktheit durch Ultrafilter (2.5.15) und den eben bewiesenen Satz über die Projektionsfilter.

Falls es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ gibt, zeigen wir, dass $\mathcal{U}$ konvergiert. Wir haben gesehen, dass $\pi_i(\mathcal{U})$ ein Ultrafilter ist. Wegen der Kompaktheit von X_i konvergiert $\pi_i(\mathcal{U})$ gegen eine nichtleere Menge $\tilde{x}_i \subseteq X_i$ für jedes $i \in I$ (diese Menge ist einelementig, wenn die Räume X_i hausdorffsch sind). Wähle mit $\mathcal{AC}$ ein Element $(x_i)_{i\in I}$ aus $\Pi_{i\in I}\tilde{x}_i$ aus. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{U}$ gegen $x := (x_i)_{i\in I}$ konvergiert.

Die Produkttopologie τ wird durch alle Urbilder $\pi_i^{-1}(\sigma)$ der Projektionsabbildungen erzeugt, wobei $\sigma \in \tau_i$ ist. Die Menge aller dieser Urbilder bildet eine sogenannte *Subbasis* der Topologie τ.
Sei $O \in \tau_x = \{o \in \tau \mid x \in o\} \subseteq \tau$. Dann besitzt O eine Darstellung der Form

$$O = \bigcup_{k\in K} \bigcap_{h\in H_k} \pi_h^{-1}(\sigma_h^{(k)}),$$

wobei K eine beliebige Indexmenge ist, die H_k endliche Teilmengen von I sind und die $\sigma_h^{(k)}$ offene Mengen in τ_h sind[6].

Wegen $x \in O$ gibt es ein $k_0 \in K$ so, dass

$$x \in \bigcap_{h \in H_{k_0}} \pi_h^{-1}(\sigma_h^{(k_0)})$$

gilt. Also haben wir auch $x_h \in \sigma_h^{(k_0)}$ $\forall h \in H_{k_0}$ und es ergibt sich folgende Schlusskette (wir verzichten jetzt auf die Angabe des ausgezeichneten k_0's im Index der $\sigma_h^{(k_0)}$ und setzen $H := H_{k_0}$):

$$\begin{aligned}
\forall h \in H : x_h \in \sigma_h \quad & \xRightarrow{\pi_h(\mathcal{U}) \xrightarrow{\tau_h} x_h} \quad \forall h \in H : \sigma_h \in \pi_h(\mathcal{U}) \\
& \xRightarrow{\pi_h(\mathcal{U}) \text{ ist Bild von } \mathcal{U}} \quad \forall h \in H : \exists \xi_h \subseteq \pi_h^{-1}(\sigma_h) : \xi_h \in \mathcal{U} \ \wedge \ \pi_h(\xi_h) = \sigma_h \\
& \xRightarrow{\mathcal{U} \text{ ist Ultrafilter}} \quad \forall h \in H : \pi_h^{-1}(\sigma_h) \in \mathcal{U} \\
& \xRightarrow{\mathcal{U} \text{ ist Ultrafilter}} \quad O \supseteq \bigcap_{h \in H_k} \pi_h^{-1}(\sigma_h) \in \mathcal{U} \\
& \xRightarrow{\mathcal{U} \text{ ist Ultrafilter}} \quad O \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\mathcal{U}$ wirklich gegen x und wir haben die Kompaktheit bewiesen. □

Bemerkung 2.5.22 Es ist wichtig darauf aufmerksam zu machen, dass wir im obigen Beweis nur an der Stelle, wo wir das Element $(x_i)_{i\in I}$ aus $\Pi_{i\in I}\tilde{x}_i$ ausgewählt haben, die volle Stärke des Auswahlaxioms benutzt haben. Wären die Räume X_i hausdorffsch, so entfiele diese Auswahl und der gesamte Beweis ließe sich nur unter der Voraussetzung von $\mathcal{ZF} + \mathcal{UF}$ durchführen (auch in der Charakterisierung der Kompaktheit durch Ultrafilter kommt nur $\mathcal{UF}$ zum Einsatz).

Folgerung 2.5.23 Es gilt in $\mathcal{ZF}$:

$$\mathcal{UF} \implies \text{Satz von Tychonoff für Hausdorffräume.}$$

Beweis. Folgt direkt aus dem Beweis des allgemeinen Satzes von Tychonoff und der vorherigen Bemerkung. □

Folgerung 2.5.24 Es sind äquivalent:

1. Satz von Tychonoff,

2. $\mathcal{AC}$.

Beweis. „1. $\Longleftarrow$ 2.“: Bereits bewiesen.

„1. $\Longrightarrow$ 2.“: Wir beziehen uns auf den Beweis von [JL 50] in einer leicht vereinfachten Form von J. Terilla[7]. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Wir wollen Tychonoff anwenden, also müssen wir eine Topologie einführen. Definiere $Y_i := X_i \cup \{X_i\}$[8] und setze $\tau_i := \{\emptyset, \{X_i\}, X_i, Y_i\} \subseteq \mathcal{P}(Y_i)$. Damit ist (Y_i, τ_i) ein kompakter, topologischer Raum. Also ist mit dem Satz von Tychonoff auch $Y := \prod_{i\in I} Y_i$ mit der Produkttopologie τ ein kompakter Raum. Definiere für jedes $k \in I$ die Mengen

$$U_k := \prod_{i \in I\setminus\{k\}} Y_i \ \dot{\times}\ \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{.-te Stelle}}}{\{X_k\}} = \pi_k^{-1}(\{X_k\}) \in \tau.$$

[6] Formal: $\exists K \in V\ \forall k \in K\ \exists H_k \subseteq I, |H_k| < \infty : \forall h \in H_k\ \exists \sigma_h^{(k)} \in \tau_h : O = \bigcup_{k\in K} \bigcap_{h\in H_k} \pi_h^{-1}(\sigma_h^{(k)})$.

[7] Ter14, S. 8.

[8] Wir benutzen hier denselben Trick wie beim Beweis des Wohlordnungssatzes. Wir wollen eine Menge finden, die sicher nicht in X_i liegt. X_i selbst erfüllt diese Eigenschaft.

Die U_k sind also offen. Sei $K \subseteq I$, $|K| < \infty$ und betrachte die Menge offener Mengen $\{U_k \mid k \in K\}$. Wir zeigen nun, dass diese Mengen keine offene Überdeckung von Y bilden können. Wir wählen dazu ein Element

$$(\tilde{x}_k)_{k\in K} \in \prod_{k\in K} Y_k \backslash \{X_k\} = \prod_{k\in K} X_k$$

aus (dies ist ohne $\mathcal{AC}$ zulässig, da es sich um ein endliches Produkt handelt, siehe 1.1.11) und definieren $(x_i)_{i\in I} \in Y$ durch

$$x_i := \begin{cases} \tilde{x}_i & \text{falls } i \in K, \\ X_i & \text{falls } i \in I \backslash K. \end{cases}$$

Wäre $(x_i)_{i\in I}$ nun in $\bigcup_{k\in K} U_k$, gäbe es ein $k \in K : (x_i)_{i\in I} \in U_k$, so dass $x_k = X_k$ ist. Jedoch ist $x_k = \tilde{x}_k \in Y_k \backslash \{X_k\}$, ein Widerspruch. Also kann

$$\bigcup_{i\in I} U_i$$

nach dem Satz von Tychonoff keine offene Überdeckung von Y sein (da ja, wie eben gezeigt wurde, jede endliche Teilmenge keine offene Überdeckung darstellt) und es gibt ein[9]

$$(a_i)_{i\in I} \in Y \backslash \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Daher ist $a_i \in X_i$ (und nicht $a_i = X_i$) für jedes $i \in I$ und wir haben gezeigt, dass $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ gilt, woraus mit 2.1.2 das Auswahlaxiom folgt.

□

2.6 Eine graphentheoretische Charakterisierung

In der Graphentheorie, die besonders in der Informatik zur Anwendung kommt, gibt es auch eine überraschende Äquivalenz zu $\mathcal{AC}$. Da das Auswahlaxiom jedoch nur über unendlichen Mengen interessant wird, müssen wir die üblicherweise betrachteten endlichen Graphen verlassen und uns den unendlichen zuwenden. Daher schließe im gesamten nächsten Abschnitt - entgegen der Konvention - das Wort Graph auch unendliche Graphen mit ein.

Definition 2.6.1 (Graph, Knoten, Ecken)
Sei K eine Menge und $E \subseteq K \times K$. eine Relation über K. Wir nennen das Tupel $G := (K, E)$ einen **Graphen** und die Elemente aus K **Knoten** und aus E **Ecken**. Wir schreiben auch $G_K := K$ und $G_E := E$.

Wenn $\forall (a, b) \in E : (b, a) \in E$ gilt (E also symmetrisch ist), nennen wir G einen **ungerichteten Graphen**. In diesem Fall können die Ecken auch als Teilmenge $\tilde{E}$ der Potenzmenge von K geschrieben werden, indem wir

$$\tilde{E} := \{\{a, b\} \in \mathcal{P}(K) \mid a, b \in K : (a, b) \in E\}$$

setzen und (K, E) mit $(K, \tilde{E})$ identifizieren.

Definition 2.6.2 (Teilgraph)
Sei $G = (K, E)$ ein Graph und $K' \subseteq K$ sowie $E' \subseteq (K' \times K') \cap E$. Dann heiße $G' := (K', E')$ ein **Teilgraph** von G und wir schreiben $G' \subseteq G$. Die Menge aller Teilgraphen von G werde mit $\mathcal{T}(G)$ bezeichnet.

Definition 2.6.3 (Weg, Zyklus)
Sei $G = (K, E)$ ein Graph. Eine Folge

$$W = \{e^1, e^2, ..., e^n\} \subseteq E$$

[9] Auch hier benötigen wir lediglich das Fundierungsaxiom, da wir ja bereits wissen, dass $Y \backslash \bigcup_{i\in i} U_i$ nichtleer ist.

heiße **Weg** von e^0 nach e^n, falls für alle $i < n$ gilt:[10] $e_2^i = e_1^{i+1}$ und $\forall i, k \in \mathbb{N}, 0 < i < k \leq n : e^i \neq e^k$. Falls $e_2^0 = e_1^n$ ist, heiße W **Zyklus**.

Definition 2.6.4 (Zusammenhang)
Sei $G = (K, E)$ ein Graph. G heiße zusammenhängend, wenn es für je zwei Knoten $a, b \in K$ einen Weg von a nach b gibt.

Bemerkung 2.6.5 Ab jetzt werden wir nur noch ungerichtete Graphen benutzen.

Definition 2.6.6 (Baum, Spannbaum)
Ein ungerichteter, zusammenhängender Graph ohne Zyklus heiße **Baum**. Die Menge aller Teilgraphen von G, die Bäume sind, wird durch $\mathcal{B}(G)$ bezeichnet.

Sei $G = (K, E)$ ein Graph und $G' \subseteq G$ ein Teilgraph, der ein Baum ist. Wenn G' alle Knoten von G enthält, heiße G' **Spannbaum** von G. Die Menge aller Spannbäume von G werde durch $\mathcal{S}(G)$ bezeichnet.

Satz 2.6.7 (Spannbaumsatz)
Jeder ungerichtete zusammenhängende Graph enthält einen Spannbaum.

Beweis. Wir setzen $\mathcal{AC}$ voraus. Sei $G = (K, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Falls G bereits ein Baum ist, haben wir einen Spannbaum von G gefunden. Sei nun $G \notin \mathcal{B}(G)$ und betrachte die folgende Menge:

$$M := \{(T, T') \in \mathcal{B}(G) \times \mathcal{B}(G) \mid T \subsetneq T' \ \wedge \ \exists k \in K : T'_K \backslash T_K = \{k\}\}.$$

Wir zeigen: für jedes $T \in \mathcal{B}(G) \backslash \mathcal{S}(G)$ gibt es mindestens einen Graphen T' so, dass $(T, T') \in M$ gilt.

Für $T = \emptyset$ ist dies offensichtlich. Sei $\emptyset \neq T \in \mathcal{B}(G) \backslash \mathcal{S}(G)$. Wähle $a \in T_K$, $b \in G_K \backslash T_K$ beliebig. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\{e^0, e^1, ..., e^n\} \subseteq E$ von a nach b. Dann gibt es offensichtlich mindestens ein $l \leq n$ so, dass $e_1^l \in T$ und $e_2^l \in G \backslash T$ ist. Setze nun $T' := (T_K \cup \{e_2^l\}, T_E \cup \{e^l\})$. Dieser Graph ist klarerweise zusammenhängend, da T zusammenhängend ist. Außerdem enthält er keinen Zyklus. Hätte er einen, würde dieser e_2^l involvieren, da T zyklusfrei ist; jedoch bildet e_2^l eine „Sackgasse", da es nur die Ecke e^l gibt, die zu e_2^l führt. Damit ist $(T, T') \in M$.

Wir können nun mit Hilfe des Auswahlaxioms eine Teilmenge $F \subseteq M$ finden, so dass $F : \mathcal{B}(G) \backslash \mathcal{S}(G) \to \mathcal{B}(G)$ eine Abbildung ist[11].

Definiere vermittels transfiniter Rekursion $T : \mathfrak{Ord} \to V$ gemäß

$$T(0) = F(\emptyset),$$

$$T(\alpha + 1) = \begin{cases} F(T(\alpha)), & \text{falls } T(\alpha)_K \neq G_K, \\ T(\alpha), & \text{falls } T(\alpha)_K = G_K. \end{cases}$$

$$T(\lambda) := \left(\bigcup_{\beta < \lambda} T(\beta)_K, \bigcup_{\beta < \lambda} T(\beta)_E \right), \text{ für } \lambda \text{ Limes.}$$

Wir zeigen jetzt durch transfinite Induktion mit Fallunterscheidung, dass $T(\alpha) \in \mathcal{B}(G)$, $\forall \alpha \in \mathfrak{Ord}$. Der Nachfolgerfall ist klar und wir zeigen nur noch, dass $T(\lambda) \in \mathcal{B}(G)$ ist für jeden Limes $\lambda \in \mathfrak{Ord}$.

Zuerst stellen wir fest, dass $T(\lambda) \in \mathcal{T}(G)$ ist, denn nach Induktionsvoraussetzung sind alle Knoten $T(\beta)_K$ in G_K enthalten ($\beta < \lambda$) und analog für die Ecken. Wir müssen noch prüfen, ob $T(\lambda)$ zusammenhängend und zyklusfrei ist.

Angenommen es gibt $a, b \in T(\lambda)_K, a \neq b$ so, dass in $T(\lambda)$ kein Weg von a nach b existiert, oder es einen Zyklus $Z := \{\{a, e_1\}, ..., \{e_n, a\}\} \subseteq T(\lambda)_E$ gibt.

[10] Hierbei bezeichne $e^i = (e_1^i, e_2^i)$.

[11] Die Menge nichtleerer Mengen, auf die wir $\mathcal{AC}$ anwenden, ist die Menge $\{M\big|_T \mid T \in \mathcal{B}(G) \backslash \mathcal{S}(G)\}$ mit $M\big|_T = \{(T, T') \in M \mid T' \in \mathcal{B}(G)\}$.

Es muss also ein $\beta < \lambda$ geben mit $a, b \in T(\beta)_K$ oder $Z \subseteq T(\beta)_E$. Das ist ausgeschlossen, da nach Induktionsvoraussetzung $T(\beta) \in \mathcal{B}(G)$ gilt und damit zusammenhängend und zyklusfrei ist. Also ist $T(\alpha) \in \mathcal{B}(G)\ \forall \alpha \in \mathfrak{Ord}$.

Gäbe es nun kein $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ so, dass $T(\alpha+1) = T(\alpha)$ ist, wäre

$$T(\alpha+1)_K \backslash \bigcup_{\beta \leq \alpha} T(\beta)_K = F(T(\alpha))_K \backslash T(\alpha)_K =: K_\alpha$$

nichtleer für jedes $\alpha \in \mathfrak{Ord}$ (aufgrund der Definition von M enthält die Menge K_α genau ein Element, wobei $K_\alpha \neq K_\beta\ \forall \beta \in \mathfrak{Ord}\backslash\{\alpha\}$) und wir erhalten eine bijektive Abbildung

$$f : \underbrace{\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{Ord}} K_\alpha}_{\subseteq G_K} \to \mathfrak{Ord}, \quad K_\alpha \mapsto \alpha.$$

Es ergibt sich ein Widerspruch, da mit dem Ersetzungsaxiom

$$\left\{ f(K_\alpha) \mid K_\alpha \in \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{Ord}} K_\alpha \right\} = \{\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{Ord}\} = \mathfrak{Ord}$$

eine Menge sein müsste, aber $\mathfrak{Ord}$ nach Burali-Forti eine echte Klasse ist. □

Folgerung 2.6.8 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Jeder vollständige, ungerichtete Graph hat einen Spannbaum,
2. Auswahlaxiom.

Beweis. „1. $\Longleftarrow$ 2.“: Bereits gezeigt.
„1. $\Longrightarrow$ 2.“: Sei eine Menge A nichtleerer, disjunkter Mengen mit $\bigcup A \cap A = \emptyset$ gegeben (wir verwenden die zu $\mathcal{AC}$ äquivalente Aussage in 2.1.1.3).
Wir stellen fest: $A \notin \bigcup A \cup A$, da wir sonst eine unendliche absteigende Mengenkette hätten, im Widerspruch zu 1.1.2. Definiere einen ungerichteten Graphen $G = (K, E)$ durch[12]

$$K := \bigcup A \,\dot\cup\, A \,\dot\cup\, \{A\} \text{ und } E := \{\{a, b\} \in \mathcal{P}(K) \mid a = A, b \in \bigcup A \ \vee\ a \in A, b \in a\}.$$

Wir zeigen, dass dieser Graph zusammenhängend ist. Seien dazu $a, b \in K, a \neq b$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. $a = A, b \in \bigcup A$: Wir haben direkt $\{a, b\} \in E$.
2. $a = A, b \in A$: Es gibt ein $c \in b \in A$, da b nichtleer ist. Es ist $c \in \bigcup A$ und damit $\{a, c\}, \{c, b\} \in E$.
3. $a \in A,\ b \in \bigcup A$: Es gibt ein $c \in a \in A$ da a nichtleer ist.
   Dann ist $\{\{a, c\}, \{c, A\}, \{A, b\}\} \subseteq E$ und wir haben einen Weg von a nach b gefunden.
4. $a \in A, b \in A$: Es gibt ein $c \in a \in A$ und ein $d \in b \in A$, da a, b nichtleer sind.
   Dann ist $\{\{a, c\}, \{c, A\}, \{A, d\}, \{d, b\}\} \subseteq E$ und wir haben einen Weg von a nach b gefunden.
5. $a \in \bigcup A, b \in \bigcup A$: Es ist $\{a, A\} \in E$ und $\{A, b\} \in E$.

Wir können also den Spannbaumsatz anwenden. Sei B ein Spannbaum von G. Sei $a \in A$. Dann gibt es nur einen einzigen Weg von a nach A über die Ecken von B, da B keinen Zyklus enthält.
Sei $\{a, b_1\}, \{b_1, b_2\}, ..., \{b_n, A\}$ dieser eindeutige Weg. Aufgrund der Definition der Menge E muss $b_1 \in a$ gelten. Nun können wir eine Auswahlfunktion $F : A \to \bigcup A$ definieren, wobei $F(a)$ dasjenige durch den Baum B eindeutig bestimmte $b_1 \in a$ ist, das auf dem eindeutig bestimmten Weg $\{a, b_1\}, \{b_1, b_2\}...\{b_n, A\}$ von a nach A an erster Stelle steht. Somit haben wir $\mathcal{AC}$ gezeigt. □

[12] $\dot\cup$ bedeutet „Vereinigung disjunkter Mengen“, hat also lediglich Hinweischarakter, im Unterschied zu der „disjunkten Vereinigung“, wie sie in 2.1.1 definiert wird.

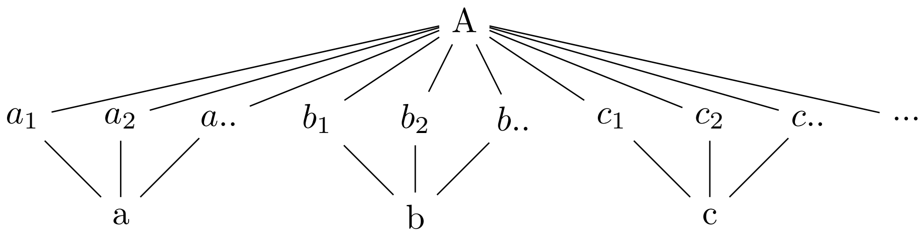

Abbildung 2.1: Konstruktion von G

2.7 Eine geometrische Charakterisierung

Definition 2.7.1 Sei E ein normierter Raum, und $K \subset E$ eine konvexe Menge (also $\forall x, y \in K\ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in K$). Dann heißt $p \in K$ **Extremalpunkt** von K, falls für beliebige $x, y \in K$, $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = p \implies x = y = p.$$

Ein Punkt ist also genau dann extremal, wenn er sich nicht als Konvexkombination zweier verschiedener Punkte aus K darstellen lässt.

Beispiel 2.7.2 (a) Betrachte

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \wedge \|y\| \leq 1\}.$$

Wir haben ein Quadrat der Seitenlänge 2 und die Extremalpunkte sind die Ecken.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Menge. Definiere $R := \sup_{k \in K} \|k\|$. Seien $0 \leq a \leq b$ und bezeichne $S(a,b) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|y\| \leq b\}$. Dann ist die Menge $S(r,R) \cap K \neq \emptyset$ für alle $0 \leq r \leq R$ und $S(R,R) \cap K$ ist eine Menge von Extremalpunkten von K.

Beweis. Es ist klar, dass falls $S(R,R) \cap K \neq \emptyset$ jeder Punkt aus dieser Menge ein Extremalpunkt von K ist. Definiere eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, indem für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element aus $S(R - \frac{1}{n}, R) \cap K$ gewählt wird. Da diese Folge durch R beschränkt ist, gibt es nach dem verallgemeinerten Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge, die gegen ein $a \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Konvergiere ohne Beschränkung der Allgemeinheit bereits (a_n) gegen a. Dann haben wir

$$R = \lim_{n\to\infty} \|a_n\| \overset{(\|\cdot\|\ stetig)}{=} \left\| \lim_{n\to\infty} a_n \right\| = \|a\|$$

und da (a_n) in K liegt und K abgeschlossen ist, ist $a \in K$ und damit ist $S(R,R) \cap K$ nicht leer. □

In [JL 72] wird folgende funktionalanalytische Form des Auswahlaxioms beschrieben:

Satz 2.7.3 (geometrische Charakterisierung von $\mathcal{AC}$)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Für jeden normierten Raum E gilt, dass die Einheitskugel $B_E := \{s \in E' \mid \|s\|_{E'} \leq 1\}$ seines topologischen Dualraums E' einen Extremalpunkt hat,

(ii) Auswahlaxiom.

Bemerkung 2.7.4 Bevor der Satz bewiesen werden kann, müssen wir erst eine aufwändigere Isometrie beweisen und auch einige funktionalanalytische Grundlagen, insbesondere die Sätze von Banach-Alaoglu und Krein-Milman, in Erinnerung rufen.

Definition 2.7.5 (gerichtete Menge)
Sei I eine Menge und $\leq \subseteq I \times I$. Dann heißt $(I, \leq)$ **gerichtet**, falls die Relation $\leq$ reflexiv und transitiv ist und zusätzlich gilt: $\forall x, y \in I : \exists z \in I : x \leq z \wedge y \leq z$; es gibt also für je zwei Elemente aus I eine obere Schranke bezüglich $\leq$.

Definition 2.7.6 (Netzkonvergenz)
Sei (X, T) ein topologischer Raum. Sei $(I, \leq_I)$ eine gerichtete Menge. Bezeichne weiterhin für jedes $x \in X$ mit $U_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge aller Umgebungen von x (also aller Teilmengen von X für die es eine offene Menge $O \in T$ gibt, so dass x in O liegt) und sei $a \geq_I b \; :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \; b \leq_I a$. Betrachte $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in X \; \forall i \in I$. Wir bezeichnen $(x_i)_{i\in I}$ als **Netz** in X und definieren folgenden **Netzkonvergenz**begriff:

$$\lim_{i\in I}(x_i) = x \; :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \; \forall U \in U_x \; \exists i_0 \in I \; \forall I \ni i \geq_I i_0 : x_i \in U.$$

Bemerkung 2.7.7
1. In der Definition reicht es statt der Menge U_x eine Umgebungs*basis* von x zu nehmen.
2. Die Menge I hat Ähnlichkeit mit einem Verband, es fehlt aber die Existenz des Infinums je zweier Elemente und die Antisymmetrie. Für mehr zu Verbänden siehe Abschnitt 4.2.

Bemerkung 2.7.8 Netze haben weitgehend analoge Eigenschaften zu „klassischen“ Folgen. Zum Beispiel ist es möglich, die Stetigkeit einer Funktion nur mit Netzen zu charakterisieren. Seien zwei topologische Räume T, T' gegeben sowie eine Funktion $f : T \to T'$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x,

(ii) $\forall$ Netze $(x_s)_{s\in S}$ in T mit $\lim\limits_{s\in S} x_s = x$ gilt: $\lim\limits_{s\in S} f(x_s) = f(x)$.

Beispiel 2.7.9 Wenn wir $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen durch die offenen Intervalle induzierten Topologie nehmen und $I = \mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung betrachten, dann haben wir die „klassischen“ Zahlenfolgen und es stimmen die Begriffe Netzkonvergenz und Konvergenz überein.

Bemerkung 2.7.10 Für jede Menge S erfüllen die Relationen $\supseteq$ und $\subseteq$ auf $I = \mathcal{P}(S)$ die Bedingungen in 2.7.6.

Definition 2.7.11 (Unbedingte Summierbarkeit/Konvergenz)
Sei L ein topologischer Vektorraum. Sei S eine Indexmenge und $X : S \to L$ eine Funktion. Bezeichne $X_s := X(s)$. Sei Σ die Menge aller endlichen Teilmengen von S, die bezüglich $\subseteq$ geordnet sind. Damit haben wir also ein Netz

$$\left(\sum_{s\in\sigma} X_s\right)_{\sigma\in\Sigma}$$

und wir sagen, die Funktion X sei **unbedingt summierbar** oder **unbedingt konvergent** gegen ein Element $x \in L$, falls

$$\lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{s\in\sigma} X_s = x$$

und schreiben in diesem Fall

$$\sum_{s\in S} X_s = x.$$

Bemerkung 2.7.12 Wenn wir „klassische“ reelle Zahlenfolgen betrachten, zeigt sich, dass die unbedingte Konvergenz mit der absoluten Konvergenz übereinstimmt, was direkt aus dem Riemannschen Umordnungssatz für Reihen folgt. Wenn wir hingegen unendlichdimensionale Vektorräume betrachten, gilt diese Äquivalenz nicht mehr; es gilt lediglich, dass jede absolut konvergente Reihe auch unbedingt konvergiert. Dies kann man sogar benutzen, um unendlichdimensionale Banachräume zu charakterisieren, denn ein Banachraum ist genau dann unendlichdimensional, wenn es eine unbedingt konvergente Reihe in ihm gibt, die nicht absolut konvergiert. Näheres dazu findet sich in [DR50].

Beispiel 2.7.13 Im Folgenden wollen wir ein paar unbedingt konvergente Reihen untersuchen, und sehen, wie nahtlos sich das verallgemeinerte Konzept von Reihen in die „klassische“ Reihenkonvergenz einpasst.

1. Nimm $L = \mathbb{R}$ und betrachte die Folge $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. Bezeichne $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0} := \{\sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \sigma \text{ ist endlich}\}$. Dann ist
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 2.$$

   Beweis. Wegen 2.7.7 genügt es, die Definition der Netzkonvergenz nur auf die ϵ-Umgebungen der 2 anzuwenden. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2 - \sum_{k=0}^{n_0} 2^{-k} = 2 - 2(1 - 2^{-(n_0+1)}) = 2^{-n_0} < \epsilon$. Definiere $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0} \ni \sigma_0 := \{0, 1, 2, ..., n_0\}$. Dann gilt für jedes $\sigma \in [\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$ mit $\sigma \supseteq \sigma_0$:
$$0 \leq 2 - \sum_{n\in\sigma} 2^{-n} \leq 2 - \sum_{n\in\sigma_0} 2^{-n} = 2^{-n_0} < \epsilon.$$

   Daher liegt $\sum_{n\in\sigma} 2^{-n}$ in der ϵ-Umgebung von 2 für jedes $\sigma \supseteq \sigma_0$ und wir haben die unbedingte Summierbarkeit der Reihe gezeigt. □

2. Jetzt wollen wir erstmals ein Beispiel sehen, worin das neue Reihenkonzept zu Eleganz in der Notation verhilft. Wir definieren dazu eine Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q^3} & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ und } p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

   Wir wollen nun zeigen, dass die Reihe
$$\sum_{s\in(0,1)} f(s)$$
   unbedingt konvergiert.

   Beweis. Sei $\sigma \in [\mathbb{Q}]^{<\aleph_0}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Es gilt folgende Abschätzung:
$$\begin{aligned} \sum_{s\in\sigma} f(s) &\leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + ... \\ &< f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right) + ... \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot \frac{1}{n^3} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

   Da also $\sum_{s\in\sigma} f(s)$ nach oben beschränkt ist für jedes $\sigma \in [\mathbb{Q}]^{\aleph_0}$, folgt mit der nächsten Bemerkung die Behauptung. □

Bemerkung 2.7.14 Sei ein normierter Raum L und eine Indexmenge S gegeben. Seien zwei Funktionen $X : S \to L$ und $Y : S \to L$ gegeben und gelte wieder $X(s) := X_s$.

1. Falls für beide Funktionen gilt:
$$\sum_{s\in S} X_s = x \in L, \qquad \sum_{s\in S} Y_s = y \in L,$$
   Dann gilt
$$\sum_{s\in S} (X_s + Y_s) = x + y \in L.$$

2. Sei λ ein Element des Körpers von L und gelte
$$\sum_{s\in S} X_s = x \in L.$$

Dann gilt

$$\sum_{s\in S} \lambda X_s = \lambda x \in L.$$

3. Wenn $L = \mathbb{R}$ ist und es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\forall \sigma \in [S]^{<\aleph_0}$ gilt:

$$\sum_{t\in\sigma} |X_t| \leq K,$$

dann sind höchstens abzählbar viele X_s verschieden von Null und die Summe

$$\sum_{s\in S} X_s$$

konvergiert unbedingt gegen ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq K$.

Beweis. 1. Sei $\epsilon > 0$, $\sigma_0 \in \Sigma := [S]^{<\aleph_0}$ so, dass $\forall \sigma \supset \sigma_0$ gilt:

$$\left\| \sum_{s\in\sigma} X_s - x \right\|_L < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \left\| \sum_{s\in\sigma} Y_s - y \right\|_L < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann ist $\forall \sigma \supset \sigma_0$:

$$\left\| \sum_{s\in\sigma} (X_s + Y_s) - (x+y) \right\|_L \leq \left\| \sum_{s\in\sigma} (X_s - x) \right\|_L + \left\| \sum_{s\in\sigma} (Y_s - y) \right\|_L < \epsilon$$

und damit ist

$$\lim_{\sigma\in\Sigma} \left(\sum_{s\in\sigma} (X_s + Y_s) \right) = x + y.$$

2. Für $\lambda = 0$ ist die Aussage klar. Sei also $\lambda \neq 0$, $\epsilon > 0$ und $\sigma_0 \in \Sigma$ so, dass $\forall \sigma \supset \sigma_0$ gilt:

$$\left\| \sum_{s\in S} X_s - x \right\|_L < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$$

Dann gilt $\forall \sigma \supset \sigma_0$:

$$\left\| \sum_{s\in\sigma} \lambda X_s - \lambda x \right\|_L = |\lambda| \left\| \sum_{s\in\sigma} X_s - x \right\|_L < \epsilon$$

Und die Behauptung folgt.

3. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge $M_k := \{s \in S \mid |X_s| > \frac{1}{k}\}$ endlich, da andernfalls für ein $k \in \mathbb{N}$ eine wachsende Folge $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \sigma_3 \subsetneq ... \subsetneq M_k$ endlicher Mengen mit $|\sigma_n| = n$ definiert werden könnte, so dass $\sum_{t\in\sigma_n} |X_t| \geq n\frac{1}{k}$ und damit die Summe $\sum_{s\in M_k} |X_s|$ divergiert. Also haben wir

$$\{s \in S \mid |X_s| > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ s \in S \mid |X_s| > \frac{1}{k} \right\}$$

und da die abzählbare Vereinigung endlicher Mengen wieder abzählbar ist, folgt der erste Teil der Behauptung. Nun können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Funktion X durch $\mathbb{N}$ indiziert ist. Dann ist

$$s_l := \sum_{n=1}^{l} |X_n| \leq K \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

und die Folge $(s_l)_{l=1}^{\infty}$ ist daher monoton wachsend und durch K beschränkt und damit die Reihe

$\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ absolut konvergent und also auch unbedingt konvergent gegen ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq K$ (siehe 2.7.7). Damit folgt die Behauptung.

□

Definition 2.7.15 Sei S eine beliebige Menge. Im Folgenden definieren wir ein paar normierte Räume als Teilmengen von $\mathbb{R}^S$ mit der dort üblichen Addition und Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned}
l^\infty(S): &= \{f \in \mathbb{R}^S \mid \sup_{s\in S}|f(s)| < \infty\} \text{ mit } \|f\| = \sup_{s\in S}|f(s)|,\\
C_0(S): &= \{f \in l^\infty(S) \mid \forall \epsilon > 0 : |\{s \in S \mid |f(s)| > \epsilon\}| < \infty\} \text{ mit der Norm von } l^\infty(S),\\
l_1(S): &= \{f \in l^\infty(S) \mid \sum_{s\in S}|f(s)| < \infty\} \text{ mit } \|f\|_{l_1(S)} = \sum_{s\in S}|f(s)|.
\end{aligned}$$

Definition 2.7.16 Sei eine Indexmenge S gegeben und sei X ein Banachraum reeller Funktionen über S. Dann heißt X **voll**, wenn für alle $\xi \in X$ und für alle $\eta \in \mathbb{R}^S$ gilt:

$$(\forall s \in S : |\eta(s)| \leq |\xi(s)|) \Longrightarrow (\eta \in X \wedge \|\eta\|_X \leq \|\xi\|_X).$$

Satz 2.7.17 Sei S eine beliebige Indexmenge. Dann sind die Räume $l_1(S)$ und $C_0(S)'$ isometrisch isomorph zueinander mit der Abbildung $T(y) = f$ so, dass $\forall x \in C_0(S)$:

$$f(x) = \sum_{s\in S} y(s)x(s).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass das so definierte f ein lineares, stetiges Funktional ist.

Zuerst die Linearität: Seien $a, b \in C_0(S)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist zuerst für jede endliche Teilmenge σ von S:

$$|\sum_{s\in\sigma} y(s)a(s)| \leq \sum_{s\in S} \underbrace{|a(s)|}_{\leq\|a\|_{C_0(S)}} |y(s)| \leq \|a\|_{C_0(S)} \underbrace{\sum_{s\in S}|y(s)|}_{\leq\|y\|_{l_1(S)}} \leq \|a\|_{C_0(S)} \|y\|_{l_1(S)} < \infty,$$

und daher konvergiert $f(a) = \sum_{s\in S} y(s)a(s) < \infty$ wegen 2.7.14(3.). Ebenso für $f(b)$. Mit 2.7.14(1.,2.) ergibt sich die Linearität von f.

Nun zur Stetigkeit: Wir haben

$$\|f\| = \sup_{\substack{a\in C_0(S)\\ \|a\|=1}} |f(a)| \leq \sup_{\substack{a\in C_0(S)\\ \|a\|=1}} \|a\|_{C_0(S)} \|y\|_{l_1(S)} = \|y\|_{l_1(S)} < \infty,$$

also folgt die Stetigkeit von f und damit ist $f \in C_0(S)'$.

Wegen Bemerkung 2.7.14 ist T linear und damit ein Homomorphismus. Es bleibt zu zeigen, dass T eine Isometrie und bijektiv ist. Dazu zeigen wir, dass T eine Umkehrabbildung U besitzt und $\|T\| \leq 1$ und $\|U\| \leq 1$ gilt.

Sei $x \in C_0(S)$ und $\sigma \in \Sigma := [S]^{<\aleph_0}$. Definiere die Projektion $P_\sigma(x)$ auf $C_0(S)$ mit

$$(P_\sigma(x))(s) := \begin{cases} x(s) & \text{falls } s \in \sigma,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für jedes $x \in C_0(S)$ gilt $\lim\limits_{\sigma\in\Sigma} \|P_\sigma(x) - x\|_{C_0(S)} = 0$, da zu jedem $\varepsilon > 0$ immer nur endlich viele $s \in S$ existieren, für die $|P_\sigma(x)(s) - x(s)| > \varepsilon$ (die Projektionen $P_\sigma(x)$ liegen also *dicht* in $C_0(S)$). Sei

$y \in l_1(S)$ und $x \in C_0(S)$ mit $\|x\|_{C_0(S)} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |T(y)(x)| &= |f(x)| = |f(\lim_{\sigma\in\Sigma} P_\sigma(x))| = \lim_{\sigma\in\Sigma} |f(P_\sigma(x))| \\ &= \lim_{\sigma\in\Sigma} |\sum_{s\in\sigma} x(s)y(s)| \le \lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{s\in\sigma} \underbrace{|x(s)|}_{\le 1} |y(s)| \\ &\le \|y\|_{l_1(S)} \end{aligned}$$

und daher haben wir

$$\|T\| = \sup_{\substack{y\in l_1(S)\\ \|y\|=1}} \|Ty\|_{C_0'(S)} = \sup_{\substack{y\in l_1(S)\\ \|y\|=1}} \sup_{\substack{x\in C_0(S)\\ \|x\|=1}} |(Ty)(x)| \le 1.$$

Definiere nun eine Abbildung $U : C_0(S)' \to \mathbb{R}^S$ gemäß $U(f) = y$ mit $y(s) = f(\delta_s)$, wobei δ_s dasjenige Element aus $C_0(S)$ sei, für welches $\delta_s(s) = 1$ und $\delta_s(q) = 0 \; \forall q \neq s$. Sei nun $f \in C_0(S)', y := Uf$ und $x(s) := \operatorname{sign}(y(s))$. Dann gilt $\forall \sigma \in \Sigma$:

$$\infty > \|f\| = \sup_{\substack{x\in C_0(S)\\ \|x\|\le 1}} |f(x)| \ge |f(P_\sigma(x))| = |\sum_{s\in\sigma} f(P_{\{s\}}(x))| = |\sum_{s\in\sigma} \underbrace{x(s)}_{=\operatorname{sign}(y(s))} \underbrace{f(\delta_s)}_{=y(s)}| = \sum_{s\in\sigma} |y(s)|.$$

Also existiert $\sum_{s\in S} |y(s)|$ nach Bemerkung 2.7.14 und U bildet nach $l_1(S)$ ab. Außerdem folgt aus obiger Gleichung

$$\|U\| = \sup_{\substack{f\in C_0(S)'\\ \|f\|\le 1}} \|Uf\|_{l_1(S)} \le 1.$$

Wir zeigen noch, dass $T^{-1} = U$. Zum Einen ist $\ker T = \{0\}$, da falls $y \in l_1(S)$ mit $y \neq 0 \; \exists q \in S$: $y(q) \neq 0$ und daher $Ty(\delta_q) = y(q)$, deshalb kann Ty nicht das Nullfunktional sein.
Falls $f = T(U(f)) \; \forall f$ ist T surjektiv. Definiere also $\forall f \in C_0(S)'$ ein $f_0 := T(U(f))$, dann gilt $\forall \sigma \in \Sigma$:

$$f_0(P_\sigma(x)) = \sum_{s\in S} P_\sigma(x)(s)(Uf)(s) = \sum_{s\in\sigma} \underbrace{P_\sigma(x)(s)}_{=x(s)} \underbrace{(Uf)(s)}_{=f(\delta_s)} = \sum_{s\in\sigma} f(x(s)\delta_s) = f(\sum_{s\in\sigma} x(s)\delta_s) = f(P_\sigma(x))$$

Wegen der Dichtheit von $P_\sigma(x)$ in $C_0(S)$ und Stetigkeit der Funktionale ist $f_0 = f$. Daher ist T ein Isomorphismus mit $T^{-1} = U$. Sei zum Abschluss noch $y \in l_1(S)$, dann gilt mit $T(y) =: f$:

$$1 \le \frac{\|f\|}{\|Uf\|} = \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \le 1$$

und wir haben gezeigt, dass T sogar ein isometrischer Isomorphismus ist.

□

Proposition 2.7.18 Sei eine Indexmenge S gegeben. Dann sind die Räume $l^\infty(S), C_0(S)$ und $l_1(S)$ voll.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung nur für $l_1(S)$; für $l^\infty(S)$ und $C_0(S)$ ist es klar aus der Definition. Seien η, ξ wie in der Definition 2.7.15 und sei $\forall s \in S : |\eta(s)| \le |\xi(s)|$ erfüllt. Für jede endliche Teilmenge σ von S gilt dann:

$$\sum_{t\in\sigma} \underbrace{|\eta(t)|}_{\le|\xi(t)|} \le \sum_{t\in\sigma} |\xi(t)| \le \sum_{s\in S} |\xi(s)|.$$

Damit ist das Netz $(\sum_{t\in\sigma} |\eta(t)|)_{\sigma\in[S]^{\le\aleph_0}}$ nach oben beschränkt und wir haben die Situation von 2.7.14. Daher konvergiert die Summe $\sum_{s\in S} |\eta(s)|$ unbedingt und es ist $\eta \in l_1(S)$ und $\|\eta\|_{l_1(S)} \le \|\xi\|_{l_1(S)}$. □

Definition 2.7.19 (Ersetzungsraum[13])
Sei eine Indexmenge S und zu jedem $s \in S$ ein normierter Raum N_s gegeben. Sei weiterhin $X \subseteq \mathbb{R}^S$ ein voller Raum. Dann bezeichne

$$P_X N_s \subseteq \left(\bigcup_{s \in S} N_s \right)^S$$

den **Ersetzungsraum** der $(N_s)_{s \in S}$ in X, für den gelte, dass er all jene Funktionen f enthalte, so dass $\forall s \in S : f(s) \in N_s$ gilt und wenn wir $\xi(s) := \|f(s)\|_{N_s}$ definieren, dann ist $\xi \in X$.
Die Norm dieses Raumes sei definiert durch

$$\|f\|_{P_X N_s} := \|\xi\|_X .$$

Beispiel 2.7.20 Sei eine Indexmenge I gegeben, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen und sei $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann sind die Räume

$$\begin{aligned}
L &:= \{f \in \mathbb{R}^A \mid \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |f(t)| < \infty\} \text{ mit} \\
\|f\|_L &:= \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |f(t)|, \quad \text{und} \\
E &:= \{f \in \mathbb{R}^A \mid [\forall \epsilon > 0 : |\{t \in A \mid |f(t)| > \epsilon\}| < \infty] \wedge [\sum_{i \in I} \sup_{t \in A_i} |f(t)| < \infty]\} \text{ mit} \\
\|f\|_E &:= \sum_{i \in I} \sup_{t \in A_i} |f(t)|
\end{aligned}$$

Ersetzungsräume, wobei L isometrisch isomorph zu $P_{l^\infty(I)} l_1(A_i)$ und E isometrisch isomorph zu $P_{l_1(I)} C_0(A_i)$ ist.

Beweis. Definiere eine Abbildung $T : L \to P_{l^\infty(I)} l_1(A_i)$ mit $T(f)(i) := f\big|_{A_i} \forall i \in I$.
T ist wohldefiniert: $\forall i \in I$ gilt: $f\big|_{A_i} \in l_1(A_i)$, da

$$\sum_{t \in A_i} |f\big|_{A_i}(t)| \leq \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |f(t)| = \|f\|_L < \infty.$$

Außerdem haben wir mit $\xi(i) := \|T(f)(i)\|_{l_1(A_i)}$, dass $\xi \in l^\infty(I)$, da

$$\sup_{i \in I} \xi(i) = \sup_{i \in I} \|T(f)(i)\|_{l_1(A_i)} = \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |f(t)| < \infty$$

(wegen $f \in L$) und es ergibt sich

$$\|T(f)\|_{P_{l^\infty(I)} l_1(A_i)} \overset{(Def.)}{=} \sup_{i \in I} \xi(i) = \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |f(t)| = \|f\|_L .$$

Also haben wir eine Isometrie und damit auch eine Injektion. Es bleibt noch die Surjektivität zu zeigen: Sei $g \in P_{l^\infty(I)} l_1(A_i)$, dann definiere einfach f durch $f(t) := g(i)(t)$ mit dem eindeutigen $i \in I$, für das $t \in A_i$ gilt. Dann ist $f \in L$, da

$$\|f\|_L = \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |f(t)| = \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |g(i)(t)| = \sup_{i \in I} \|g(i)\|_{l_1(A_i)} = \|g\|_{P_{l^\infty(I)} l_1(A_i)} < \infty.$$

Damit haben wir die erste isometrische Isomorphie gezeigt.
Nun zur zweiten Isometrie: Definiere $J : E \to P_{l_1(I)} C_0(A_i)$ mit $J(f)(i) := f\big|_{A_i} \forall i \in I$. J ist wohldefi-

[13] Siehe [Day73, S.35]

niert, denn $\forall i \in I\, \forall \epsilon > 0$ haben wir

$$|\{t \in A_i \mid |f\big|_{A_i}(t)| > \epsilon\}| \leq |\{t \in A \mid |f(t)| > \epsilon\}| < \infty$$

und damit ist $J(f)(i) \in C_0(A_i)$. Mit $\xi(i) := \|J(f)(i)\|_{C_0(A_i)}$ haben wir

$$\begin{aligned} \|J(f)\|_{P_{l_1(I)}C_0(A_i)} &= \|\xi\|_{l_1(I)} = \sum_{i\in I} |\xi(i)| = \sum_{i \in I} \|J(f)(i)\|_{C_0(A_i)} \\ &= \sum_{i\in I} \sup_{t\in A_i} |f\big|_{A_i}(t)| = \underbrace{\sum_{i\in I} \sup_{t \in A_i} |f(t)|}_{=\|f\|_E} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Also ist wirklich $J(f) \in P_{l_1(I)}C_0(A_i)$ und J eine Isometrie. Sei schließlich noch $g \in P_{l_1(I)}C_0(A_i)$ beliebig. Definiere $f \in \mathbb{R}^A$, $f(t) := g(i)(t)$, mit dem eindeutig bestimmten $i \in I$, so dass $t \in A_i$ ist. Wir müssen noch zeigen, dass $f \in E$ ist. Es gilt

$$\sum_{i\in I} \sup_{t\in A_i} |f(t)| = \sum_{i\in I} \sup_{t \in A_i} |g(i)(t)| = \sum_{i\in I} \|g(i)\|_{C_0(A_i)} = \|g\|_{P_{l_1(I)}C_0(A_i)} < \infty$$

Sei $\epsilon > 0$. Angenommen, $\{t \in A \mid |f(t)| > \epsilon\}$ ist unendlich. Falls es unendlich viele $i \in I$ gibt, so dass $f(t) > \epsilon$ für ein $t \in A_i$ ist, haben wir also einen Widerspruch zu obiger Gleichung. Also muss es ein $i \in I$ geben, so dass $\{t \in A_i \mid |f(t)| > \epsilon\} = \{t \in A_i \mid |g(i)(t)| > \epsilon\}$ unendlich ist, im Widerspruch zu $g(i) \in C_0(A_i)$. Damit ist $f \in E$ und J ein isometrischer Isomorphismus. □

Bemerkung 2.7.21 Der Lesbarkeit halber verwenden wir im folgenden Satz für Funktionen $f : A \to B$ statt $f(s)$ oft auch die Schreibweise f_s.

Satz 2.7.22 Sei eine Indexmenge S und eine Familie von normierten Räumen $(N_s)_{s\in S}$ gegeben. Dann sind die Räume

$$P_{l^\infty(S)}N_s' \quad \text{und} \quad (P_{l_1(S)}N_s)'$$

isometrisch isomorph zueinander mit der Isomorphie

$$T : P_{l^\infty(S)}N_s' \to (P_{l_1(S)}N_s)',\, T(y) = f \text{ so, dass } f(x) = \sum_{s\in S} y_s(x_s)\, \forall x \in P_{l_1(S)}N_s.$$

Beweis. Sei wieder $\Sigma := [S]^{<\aleph_0}$. Überprüfe zuerst die Wohldefiniertheit der Abbildung T, also deren Existenz. Sei dazu $y \in P_{l^\infty(S)}N_s'$ und $q \in P_{l_1(S)}N_s$ gegeben und es gelte erst einmal $\|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} \leq 1$ und $\|q\|_{P_{l_1(S)}N_s} \leq 1$. Wegen

$$y_s(q_s) = y_s(\|q_s\| \frac{q_s}{\|q_s\|}) = \|q_s\|\, y_s(\frac{q_s}{\|q_s\|}) \leq \|q_s\| \sup_{\substack{p\in N_s \\ \|p\|\leq 1}} |y_s(p)| = \|q_s\|\, \|y_s\|\, \forall s \in S$$

ist dann

$$\begin{aligned} |(Ty)(q)| &= |\sum_{s\in S} y_s(q_s)| = |\lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{s\in\sigma} y_s(q_s)| \leq \lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{s\in\sigma} |y_s(q_s)| \leq \lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{s\in\sigma} \underbrace{\|y_s\|_{N_s'}}_{\leq \|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'}} \|q_s\|_{N_s} \\ &\leq \|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} \lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{s\in\sigma} \|q_s\|_{N_s} = \|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} \sum_{s\in S} \|q_s\|_{N_s} = \|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} \|q\|_{P_{l_1(S)N_s}}. \end{aligned}$$

Also existiert die Summe $\sum_{s\in S} y_s(q_s) = Ty(q)$ nach 2.7.14 wirklich und wir haben

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\substack{y\in P_{l^\infty(S)}N_s' \\ \|y\|\le 1}} \|T(y)\|_{(P_{l_1(S)}N_s)'} = \sup_{\substack{y\in P_{l^\infty(S)}N_s' \\ \|y\|\le 1}} \sup_{\substack{q\in P_{l_1(S)}N_s \\ \|q\|\le 1}} |T(y)(q)| \\
&\le \sup_{\substack{y\in P_{l^\infty(S)}N_s' \\ \|y\|\le 1}} \sup_{\substack{q\in P_{l_1(S)}N_s \\ \|q\|\le 1}} \|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} \|q\|_{P_{l_1(S)}N_s} \\
&\le 1.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\|T\| \le 1$ gezeigt. Sei noch $\lambda \in \mathbb{R}$ und $q, w \in P_{l_1(S)}N_s$ beliebig, dann ist:

$$\begin{aligned}
Ty(w+q) &= \sum_{s\in S} y_s(w+q) = \sum_{s\in S}(y_s(w) + y_s(q)) \\
&\overset{(2.7.14)}{=} \sum_{s\in S} y_s(w) + \sum_{s\in S} y_s(q) = Ty(w) + Ty(q)
\end{aligned}$$

und

$$Ty(\lambda q) = \sum_{s\in S} y_s(\lambda q_s) = \sum_{s\in S} \lambda y_s(q_s) \overset{(2.7.14)}{=} \lambda \sum_{s\in S} y_s(q_s) = \lambda Ty(q).$$

Es gilt $\forall y \in P_{l^\infty(S)}N_s'$:

$$\|Ty\|_{(P_{l_1(S)}N_s)'} \le \|y\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} < \infty,$$

und daher ist Ty ein stetiges Funktional und wir haben $Ty \in (P_{l_1(S)}N_s)'$ gezeigt. Wir müssen noch zeigen, dass T linear ist. Seien dazu $x, y \in P_{l^\infty(S)}N_s', q \in P_{l_1(S)}N_s, \lambda \in \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned}
T(x+y)(q) &= \sum_{s\in S}(x_s+y_s)(q(s)) = \sum_{s\in S}(x_s(q_s)+y_s(q_s)) \overset{(2.7.14)}{=} \sum_{s\in S} x_s(q_s) + \sum_{s\in S} y_s(q_s) \\
&= T(x)(q) + T(y)(q) = (T(x)+T(y))(q) \text{ und} \\
T(\lambda x)(q) &= \sum_{s\in S}(\lambda x_s)(q_s) = \sum_{s\in S} \lambda x_s(q_s) \overset{(2.7.14)}{=} \lambda \sum_{s\in S} x_s(q_s) = \lambda T(x)(q).
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt sehen, dass T invertiert werden kann, und definieren dazu die Abbildung

$$U : (P_{l_1(S)}N_s)' \to P_{l^\infty(S)}N_s',\ Uf = y \text{ mit } y_s(x) := f(\delta_s(x)) \quad \forall s \in S\ \forall x \in N_s,$$

wobei $\forall p \in S$

$$\delta_s(x)(p) := \begin{cases} x & \text{falls p=s,} \\ 0_{N_p} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\delta_s(x) \in P_{l_1(S)}N_s$, mit $\|\delta_s(x)\|_{P_{l_1(S)}N_s} = \|x\|_{N_s}$. Seien jetzt $f \in (P_{l_1(S)}N_s)', s \in S$ und $n, m \in N_s$. Wir überprüfen, ob $(Uf)_s \in N_s'$ gilt. Zuerst stellen wir fest, dass $(Uf)_s(n) = f(\delta_s(n)) \in \mathbb{R}$. Nun liefern

$$\begin{aligned}
(Uf)_s(n+m) &= f(\delta_s(n+m)) = f(\delta_s(n) + \delta_s(m)) \\
&= f(\delta_s(n)) + f(\delta_s(m)) = (Uf)_s(n) + (Uf)_s(m)
\end{aligned}$$

und

$$(Uf)_s(\lambda n) = f(\delta_s(\lambda n)) = f(\lambda\delta_s(n)) = \lambda f(\delta_s(n)) = \lambda(Uf)_s(n)$$

die Linearität von $(Uf)_s$. Es liefert

$$\|(Uf)_s\|_{N_s'} = \sup_{\substack{n\in N_s \\ \|n\|\le 1}} |f(\delta_s(n))| \overset{(\|\delta_s(n)\|=1)}{\le} \|f\|$$

die Stetigkeit von $(Uf)_s$ und schließlich ist

$$\|Uf\|_{P_{l^\infty(S)}N_s'} = \sup_{s\in S}\|(Uf)_s\|_{N_s'} = \sup_{s\in S}\sup_{\substack{x\in N_s\\ \|x\|_{N_s}\le 1}} |(Uf)_s(x)| = \sup_{s\in S}\sup_{\substack{x\in N_s\\ \|x\|_{N_s}\le 1}} |f(\delta_s(x))| \le \|f\|_{(P_{l_1(S)}N_s)'}\,.$$

Also bildet U wirklich nach $P_{l^\infty(S)}N_s'$ ab und wir erhalten sofort aus obiger Gleichung $\|U\| \le 1$. Insbesondere ist U also stetig. Wir zeigen noch, dass $T^{-1} = U$ ist. Definiere $(T\circ U)f := \tilde{f}$ und sei $x \in P_{l_1(S)}N_s$. Zuerst einmal stellen wir fest, dass

$$\sum_{s\in S}\delta_s(x_s) = x$$

in $P_{l_1(S)}N_s$, da

$$\left\|\sum_{s\in S}\delta_s(x_s) - x\right\|_{P_{l_1(S)}N_s} = \sum_{s\in S}\left\|\left(\sum_{p\in S}\delta_p(x_p) - x\right)(s)\right\|_{N_s} = \sum_{s\in S}\left\|\underbrace{\lim_{\sigma\in\Sigma}\left(\sum_{p\in\sigma}\underbrace{\delta_p(x_p)(s)}_{=0 \text{ falls } p\neq s}\right)}_{=x(s)} - x(s)\right\|_{N_s} = 0$$

und deshalb ist

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= T(U(f))(x) = \sum_{s\in S}(Uf)_s(x_s) = \lim_{\sigma\in\Sigma}\sum_{s\in\sigma} f(\delta_s(x_s)) = \lim_{\sigma\in\Sigma} f\left(\sum_{s\in\sigma}\delta_s(x_s)\right)\\ &\overset{(2.7.8)}{=} f\left(\lim_{\sigma\in\Sigma}\sum_{s\in\sigma}\delta_s(x_s)\right) = f\left(\sum_{s\in S}\delta_s(x_s)\right) = f(x)\end{aligned}$$

und also $T(U(f)) = f$. Zum Abschluss sei $y \in P_{l^\infty(S)}N_s'$ und definiere $(U\circ T)(y) =: \tilde{y}$. Seien $s \in S$ und $x \in N_s$ beliebig. Wir haben

$$\tilde{y}(s)(x) = (Ty)(\delta_s(x)) = \sum_{p\in S}\underbrace{y_p(\underbrace{(\delta_s(x))_p}_{=0 \text{ für } p\neq s})}_{=0 \text{ für } p\neq s} = y_s((\delta_s(x))_s) = y_s(x).$$

Damit ist $U(T(y)) = y$ und es gilt tatsächlich $U = T^{-1}$. Wegen $\|T\| \le 1$ und $\|T^{-1}\| \le 1$ haben wir eine Isometrie und T ist ein isometrischer Isomorphismus. □

Folgerung 2.7.23 Die Räume E' und L aus dem Beispiel 2.7.20 sind isometrisch isomorph zueinander.

Beweis. Folgt sofort aus 2.7.17 und 2.7.22. □

Jetzt erinnern wir noch ein paar wichtige Begriffe und zentrale Sätze der lokalkonvexen Funktionalanalysis (siehe dazu auch [Wer05], S. 389ff.) und verzichten weitgehend auf die Beweise.

Beispiel 2.7.24 (Ein Halbnormensystem)
Sei E ein topologischer Vektorraum und E' dessen topologischer Dualraum. Sei $n \in \mathbb{N}$ und definiere für $x_1, x_2, ..., x_n \in E$

$$p_{x_1,x_2,...,x_n}(f) := \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, ..., |f(x_n)|\}.$$

Dann ist $p_{x_1,x_2,...,x_n}$ eine Halbnorm.

Beweis. Seien $f, g \in E'$. Dann ist

$$\begin{aligned} p_{x_1,x_2,...,x_n}(f+g) &= \max\{|(f+g)(x_1)|, ..., |(f+g)(x_n)|\} \\ &\leq \max\{|(f)(x_1)| + |g(x_1)|, ..., |(f)(x_n)| + g(x_n)|\} \\ &\leq \max\{|f(x_1)|, ..., |f(x_n)|\} + \max\{|g(x_1)|, ..., |g(x_n)|\} \\ &= p_{x_1,x_2,...,x_n}(f) + p_{x_1,x_2,...,x_n}(g) \end{aligned}$$

und die Homogenität ist offensichtlich. □

Definition 2.7.25 (Lokalkonvexer Raum)
Ein topologischer Vektorraum (E, τ) heißt **lokalkonvex**, wenn es eine Familie von Halbnormen $(p_j)_{j \in J}$ auf E gibt, so dass die Topologie τ durch die offenen Mengen

$$U_{K,r}(x) := \{y \in E \mid \forall k \in K : p_k(x - y) < r\}$$

mit $x \in E$, $K \subset J$, $|K| < \infty$ und $r \in \mathbb{R}_+$ erzeugt wird.

Definition 2.7.26 (Schwach*-Topologie eines Vektorraums)
Sei E ein topologischer Vektorraum und E' dessen topologischer Dualraum. Dann heißt die durch die Halbnormenfamilie

$$\{p_{x_1,x_2,...,x_n} \mid n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in E\}$$

induzierte Topologie auf E' die **schwach*-Topologie** von E'.

Satz 2.7.27 (Banach-Alaoglu)
Sei E ein normierter Vektorraum und bezeichne $B := \{f \in E' \mid \|f\|_{E'} \leq 1\}$ die Einheitskugel seines topologischen Dualraums. Dann ist B schwach*-kompakt in E'.

Satz 2.7.28 (Krein-Milman)
Sei E ein lokalkonvexer Raum und sei $B \subseteq E$ kompakt und konvex. Dann ist B die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge seiner Extremalpunkte. Insbesondere gilt, falls $B \neq \emptyset$, dass B mindestens einen Extremalpunkt besitzt.

Bemerkung 2.7.29 In den Beweisen der beiden vorangegangenen Sätze benutzt man üblicherweise den Satz von Tychonoff (für Banach-Alaoglu) und das Lemma von Zorn (für Krein-Milman), die beide äquivalent zum Auswahlaxiom sind.

Jetzt haben wir alles beisammen, um die Äquivalenz zu beweisen und erinnern hier noch einmal an den schon am Anfang dieses Abschnitts formulierten Satz.
Satz 2.7.3 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Für jeden normierten Raum $E \neq \emptyset$ gilt, dass die Einheitskugel $B_E := \{s \in E' \mid \|s\|_{E'} \leq 1\}$ seines topologischen Dualraums E' einen Extremalpunkt hat,

(ii) Auswahlaxiom.

Beweis. „*(i)* $\Leftarrow$ *(ii)*“: Die Einheitskugel B von E' ist nichtleer und nach dem Satz von Banach-Alaoglu schwach*-kompakt und hat daher nach Krein-Milman einen Extremalpunkt. Zum Beweis des Satzes von Banach-Alaoglu benötigen wir das Auswahlaxiom (versteckt in der Anwendung des Satzes von Tychonoff).

„*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*“: Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Wir wollen für diese Familie von Mengen eine Auswahlfunktion finden. Wir können annehmen, dass die Mengen A_i disjunkt sind (siehe 2.1.1). Sei $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ und definiere die Räume:

$$\begin{aligned} K &:= \{x \in \mathbb{R}^A \mid \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |x(t)| \leq 1\}, \\ L &:= \{x \in \mathbb{R}^A \mid \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |x(t)| < \infty\}, \\ E &:= \{x \in \mathbb{R}^A \mid [\forall \epsilon > 0 : |\{t \in A \mid |x(t)| > \epsilon\}| < \infty] \wedge [\sum_{i \in I} \sup_{t \in A_i} |x(t)| < \infty]\}. \end{aligned}$$

L und E sind normierte Räume mit den folgenden Normen (siehe Beispiel 2.7.20):

$$\|x\|_L = \sup_{i\in I} \sum_{t\in A_i} |x(t)|,$$

$$\|y\|_E = \sum_{i\in I} \sup_{t\in A_i} |y(t)|.$$

Wir haben in 2.7.23 gesehen, dass L und E' isometrisch isomorph zueinander sind und daher kann man K als die Einheitskugel von E' ansehen. Nach der Voraussetzung hat K also einen Extremalpunkt e. Nun wird sich zeigen, dass es zu jedem $i \in I$ *genau ein* $t \in A_i$ gibt, so dass $e(t) \neq 0$ ist. Wir zeigen zuerst die Existenz, dann die Eindeutigkeit. Angenommen, es gibt ein $i_0 \in I$, so dass

$$e(t) = 0 \quad \forall t \in A_{i_0}$$

gilt. Wähle ein $v \in A_{i_0}$. Dazu benötigt man $\mathcal{AC}$ nicht - es genügt z.B. das Fundierungsaxiom, welches uns ein beliebiges Element aus einer nichtleeren Menge liefert. Zur Erinnerung: das Fundierungsaxiom lautet $\forall T : (T \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in T : (x \cap T) = \emptyset)$. Siehe hierzu auch [Jec78, S. 70]. Definiere $y, z \in L$:

$$y(v) := 1, z(v) := -1 \text{ und } y(x) = z(x) = e(x) \quad \forall x \in A\backslash\{v\}.$$

Damit gilt:

$$\|y\|_L = \sup_{i\in I} \sum_{t\in A_i} |y(t)| = \max\{\underbrace{\sum_{t\in A_{i_0}} |y(t)|}_{=1}, \underbrace{\sup_{i\in I\backslash\{i_0\}} \sum_{t\in A_i} |y(t)|}_{\leq \|e\|_L \leq 1}\} = 1.$$

Analog für z und damit sind $y, z \in K$. Somit ist $e = \frac{y+z}{2}$ und $y \neq z$, was der Extremalität von e widerspricht! Jetzt wollen wir die Eindeutigkeit zeigen und dazu nehmen wir an, dass es ein $i_0 \in I$ gibt, so dass für zwei verschiedene $u, v \in A_{i_0}$ gilt:

$$e(u) \neq 0 \text{ und } e(v) \neq 0.$$

Wir definieren erneut $y, z \in \mathbb{R}^A$ durch

$$\begin{aligned} y(u) &:= e(u)(1 + |e(v)|), \\ y(v) &:= e(v)(1 - |e(u)|), \\ z(u) &:= e(u)(1 - |e(v)|), \\ z(v) &:= e(v)(1 + |e(u)|), \end{aligned}$$

$$z(x) := y(x) := e(x)\ \forall x \in A\backslash\{u, v\}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \|y\|_L &= \max\{\sum_{t\in A_{i_0}} |y(t)|, \underbrace{\sup_{i\in I\backslash\{i_0\}} \sum_{t\in A_i} |y(t)|}_{\leq \|y\|_L \leq 1}\} \leq \max\{\underbrace{\left(\sum_{t\in A_{i_0}\backslash\{u,v\}} |e(t)|\right)}_{\leq 1-|e(u)|-|e(v)|} + |y(u)| + |y(v)|, 1\} \\ &\leq \max\{1 - |e(u)| - |e(v)| + |e(u)(1 + |e(v)|)| + |e(v)\underbrace{(1 - |e(u)|)}_{\geq 0}|, 1\} = 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir also $y \in K$ und analog, $z \in K$. Außerdem haben wir $e = \frac{y+z}{2}$, da $\frac{(y+z)(u)}{2} = \frac{1}{2}(e(u)(1 + |e(v)|) + e(u)(1 - |e(v)|)) = e(u)$, $\frac{(y+z)(v)}{2} = \frac{1}{2}(e(v)(1 - |e(u)|) + e(v)(1 + |e(u)|)) = e(v)$ und $\forall t \in A\backslash\{u, v\} : \frac{(y+z)(t)}{2} = \frac{1}{2}(e(t) + e(t)) = e(t)$ und $y \neq e \neq z$ ein Widerspruch, wegen der Extremalität von $e(t)$! Nun können wir eine Auswahlfunktion $c : I \to A, \quad c(i) := t$ definieren, wobei t dasjenige eindeutige Element sein soll, für das $e(t) \neq 0$ gilt und wir sind fertig. $\square$

Kapitel 3

Einige paradoxe Konsequenzen von AC

Randall Munroe[1]

In diesem Kapitel wollen wir uns der Frage widmen, was für erstaunliche Konsequenzen die Verwendung des Auswahlaxioms mit sich bringen kann.

3.1 Das Banach-Tarski-Paradoxon und die Unlösbarkeit des Maßproblems

Dieser Abschnitt stellt eines der bekanntesten Paradoxa im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom dar. Es geht darum zu zeigen, dass wir die volle Einheitskugel mit Hilfe von $\mathcal{AC}$ in endlich viele Teile zerlegen können, und zwar so, dass wir nur durch Verschiebungen und Drehungen dieser Teile zwei Kugeln je desselben Volumens der Ausgangskugel erhalten können, was ja unserer Anschauung widerspricht. Dieses Ergebnis ist insofern von mathematischer Relevanz, als dass dadurch ein naiver Begriff von Maß und Inhalt im Raum als nichtexistent bewiesen wird. Hierbei orientieren wir uns grob an [Bea04] und [Win], wobei insbesondere der Satz 3.1.13 in [Bea04] anders formuliert und bewiesen wird

Definition 3.1.1 (Zerlegung)
Sei A eine Menge. Eine Menge $Z \subset \mathcal{P}(A)$ heißt **Zerlegung** von A, falls

$$\forall z_1, z_2 \in Z,\ z_1 \neq z_2 \implies z_1 \cap z_2 = \emptyset$$

ist und wir

$$\bigcup Z = A$$

haben.

Definition 3.1.2 (Zerlegungsäquivalenz)
Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei beliebige Mengen. Wir sagen, dass A und B **zerlegungsäquivalent**[2] sind,

[1]Entnommen aus: http://xkcd.com/804/.
[2]Die Idee, Zerlegungsäquivalenz zu definieren und extensiv zu benutzen, ist mir durch [Win], S. 12, gekommen.

wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt so, dass

$$(a_i)_{i=1}^m \subset \mathcal{P}(A),\ (b_i)_{i=1}^m \subset \mathcal{P}(B)$$

Zerlegungen von A bzw. B sind und es Bijektionen

$$f_i : a_i \to b_i,\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,m}$$

gibt, die lediglich durch endliche Hintereinanderausführung von Drehungen und Transpositionen entstehen.
Wir schreiben in diesem Fall $A \overset{z}{\sim} B$.

Bemerkung 3.1.3 Man sieht sofort, dass die Relation $\overset{z}{\sim}$ symmetrisch ist.

Lemma 3.1.4 Seien $r, n \in \mathbb{N}$ und seien $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^r)$ mit $a_i \cap a_j = b_i \cap b_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ und $a_i \overset{z}{\sim} b_i$. Dann gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n a_i \overset{z}{\sim} \bigcup_{i=1}^n b_i.$$

Beweis. Folgt sofort aus der Definition. □

Wir wollen nun eine zentrale Eigenschaft der Zerlegungsäquivalenz beweisen, die es uns später ermöglicht, die Einheitskugel in zwei Kugeln desselben Volumens zu zerlegen, ohne eine konkrete Zerlegung angeben zu müssen.

Satz 3.1.5 (Transitivität der Zerlegungsäquivalenz)
Sei $r \in \mathbb{N}$ und seien $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^r$. Dann gilt:

$$A \overset{z}{\sim} B \wedge B \overset{z}{\sim} C \implies A \overset{z}{\sim} C.$$

Beweis. Gelte $A \overset{z}{\sim} B$ und $B \overset{z}{\sim} C$. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und

$$(a_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(A),\ (b_i)_{i=1}^n, (b'_i)_{i=1}^m \subseteq \mathcal{P}(B),\ (c_i)_{i=1}^m \subseteq \mathcal{P}(C)$$

Zerlegungen und

$$f_i : a_i \to b_i,\ i \in \mathbb{N}_{1,n}, \quad g_i : b'_i \to c_i,\ i \in \mathbb{N}_{1,m}$$

die dazugehörigen Bijektionen, die lediglich aus endlich vielen Drehungen und Verschiebungen zusammengesetzt sind. Setze

$$I := \{(j,k) \subseteq \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,m} \mid b_j \cap b'_k \neq \emptyset\}.$$

Wir stellen fest, falls $(j,k) \neq (j^*, k^*)$ gilt, haben wir

$$(b_j \cap b'_k) \cap (b_{j^*} \cap b'_{k^*}) = (b_j \cap b_{j^*}) \cap (b'_k \cap b'_{k^*}) = \emptyset$$

und

$$\bigcup_{(j,k)\in I} b_j \cap b'_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{1,n}} \left(\bigcup_{(j,k)\in I} b_j \cap b'_k \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{1,n}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_{1,m}} b_j \cap b'_k \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{1,n}} \left(\underbrace{b_j \cap \underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}_{1,m}} b'_k}_{=B}}_{=b_j} \right) = B.$$

Also ist $(b_j \cap b'_k)_{(j,k)\in I}$ eine endliche Zerlegung von B und die Mengen

$$(f_j^{-1}(b_j \cap b'_k))_{(j,k)\in I} \subseteq \mathcal{P}(A), \quad (g_k(b_j \cap b'_k))_{(j,k)\in I} \subseteq \mathcal{P}(C)$$

bilden endliche Zerlegungen von A bzw. C, da

$$f := \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{1,n}} f_j, \; g := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_{1,m}} g_k$$

Bijektionen mit $f : A \to B$ bzw. $g : B \to C$ sind (hierbei fassen wir Funktionen als Relationen auf). Wir definieren $\forall \; (j,k) \in I$:

$$f_{(j,k)} := f_j\big|_{f_j^{-1}(b_j \cap b'_k)}, \quad g_{(j,k)} := g_k\big|_{b_j \cap b'_k}, \quad h_{(j,k)} := g_{(j,k)} \circ f_{(j,k)} : f_j^{-1}(b_j \cap b'_k) \to g_k(b_j \cap b'_k).$$

Die Funktionen $h_{(j,k)}$ bestehen aus endlich vielen Drehungen und Verschiebungen, da $f_{(j,k)}$ und $g_{(j,k)}$ aus endlich vielen ebensolchen bestehen. Damit haben wir zusammenfassend Zerlegungen von A bzw. C und dazugehörige Bijektionen $h_{(j,k)}$ konstruiert, die die Anforderungen erfüllen und es gilt $A \overset{z}{\sim} C$. □

Wir kommen nun zu einer Formulierung des Banach-Tarski Paradoxons, die zu den bekanntesten gehört. Eigentlich haben Tarski und Banach in ihrem 1924 veröffentlichten Artikel in [ST24] gezeigt, dass zwei beliebige Polyeder des R^n mit $n \geq 3$ zerlegungsäquivalent sind, aber uns soll die „anschaulichere“ Variante der Kugelverdopplung an dieser Stelle genügen; sie reicht auch bereits aus, um das Maßproblem zu beantworten, auf das wir am Ende dieses Abschnitts zu sprechen kommen. Aus ihr kann darüber hinaus auch mit etwas Mühe der allgemeinere Fall von Polyedern gefolgert werden.

Satz 3.1.6 (Banach-Tarski-Paradoxon)
Bezeichne mit $A = K^3$ die volle Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Seien $B := K^3 + (0,0,3)^T, \; C := K^3 + (0,0,-3)^T$. Dann gilt

$$A \overset{z}{\sim} (B \cup C).$$

Beweis. Später. □

Wir wollen im Folgenden einige Grundlagen für den Beweis des Paradoxons legen und zeigen zuerst einige allgemeine Ergebnisse der Gruppentheorie. Dabei wollen wir im Blick behalten, dass wir später mit einer konkreten Untergruppe G der Drehgruppe $SO(3)$ und mit $X = K^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$ arbeiten werden.

Definition 3.1.7 (Freie Gruppe, Wörter)
Sei G eine Gruppe und ε ihr neutrales Element. Dann heißt G **frei**, falls es eine endliche Teilmenge $E \subseteq G$ gibt, die G erzeugt und jedes Element $g \in G \backslash \{\varepsilon\}$ auf eindeutige Art und Weise durch eine minimale Verkettung von Elementen aus E dargestellt wird.
Das heißt genauer: ist $g \in G \backslash \{\varepsilon\}$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $l \in \mathbb{N}$ und eindeutig bestimmte $a_1, ..., a_l \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ und $z_1, ..., z_l \in E$ mit $z_j \neq z_{j+1}$ so, dass

$$g = z_1^{a_1} z_2^{a_2} ... \; z_l^{a_l} \tag{3.1}$$

gilt. Wir nennen die *bezeichnende* Zeichenkette $z_1^{a_1} z_2^{a_2} ... \; z_l^{a_l}$ ein von E erzeugtes **Wort** und g das von diesem Wort *bezeichnete* Element aus G.

Wenn s ein von E erzeugtes Wort ist, so bezeichne mit $W(s) \subseteq G$ die Menge aller Gruppenelemente, deren durch E erzeugte Wörter mit s anfangen.

Lemma 3.1.8 Eine durch E erzeugte Gruppe G ist genau dann frei, wenn das Neutralelement ε von G keine Darstellung der Form 3.1 besitzt.

Beweis. Sei G frei. Wäre $\varepsilon = z_1^{a_1} z_2^{a_2} ... \; z_l^{a_l}$ mit l, z_j, a_j wie in 3.1, hätten wir

$$z_1 = z_1^{a_1+1} z_2^{a_2} ... \; z_l^{a_l},$$

ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung von z_1.

Nehmen wir nun umgekehrt an, G ist nicht frei. Dann gibt es ein $\mu \in G$ und zwei verschiedene von E erzeugte Wörter a, b, die beide μ bezeichnen; es ist also $\mu = a = b$.[3] Dann können wir das Wort a^{-1}

[3] Hier bezieht sich „=“ auf das Bezeichnete (das Gruppenelement), *nicht* auf das bezeichnende Wort. Wollen wir die bezeichnenden Zeichenketten vergleichen, benutzen wir $\equiv$ dafür.

durch Spiegelung von a und Negativierung der Potenzen bilden[4] und erhalten durch Konkatenation und Kürzen das nichtverschwindende Wort $a^{-1}b = \varepsilon$ (würde es verschwinden, wären a und b nicht verschiedene Wörter). Damit haben wir eine Darstellung von ε in der Form 3.1 gefunden. $\square$

Beispiel 3.1.9 (freie Untergruppe der Drehgruppe)
Wir wissen aus der linearen Algebra, dass die Gruppe aller Drehungen $SO(3)$ in $\mathbb{R}^3$ isomorph ist zu der Gruppe der Drehmatrizen

$$\{M \in GL_3(\mathbb{R}) \mid MM^T = I \ \wedge \ \det M = 1\}.$$

Seien

$$\sigma := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha := \frac{1}{3},\ \beta := \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Dann ist die von σ und τ erzeugte Untergruppe von $SO(3)$

$$G := \langle \sigma, \tau \rangle$$

eine freie Gruppe.

Beweis. Wir benutzen zum Beweis eine Idee aus [Bea04], S 240. Zuerst einmal ist klar, dass es sich bei σ und τ um Drehmatrizen handelt. Da nämlich $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$ gilt, liegt (α, β) auf dem Einheitskreis und es gibt einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ so, dass $\alpha = \cos\theta$ und $\beta = \sin\theta$ ist. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir wollen nun untersuchen, wie σ^n und τ^n aussehen. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und bezeichne

$$D_\theta := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D_\theta D_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta) \\ \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta & -(\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix} =: D_{\theta+\varphi}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\sigma^n = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & -\sin n\theta \\ 0 & \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Wir benötigen noch ein paar Eigenschaften von $\cos n\theta$ und $\sin\theta$, bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen können. Wir wollen nun zeigen, dass mit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$\cos n\theta = \frac{\gamma_n}{3^{|n|}}, \quad \sin n\theta = \frac{2\sqrt{2}\delta_n}{3^{|n|}} \tag{3.2}$$

gilt, wobei $\gamma_n, \delta_n \in \mathbb{Z}$ mit $3 \nmid \gamma_n,\ 3 \nmid \delta_n$. Sei zunächst $n > 0$. Die Eulerformel liefert

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}\ e^{in\theta}, \quad \sin n\theta = \mathrm{Im}\ e^{in\theta} \qquad (*)$$

[4] Wenn z.B. $a \equiv z_1^2 z_2^{-3}$ meint $a^{-1} \equiv z_2^3 z_1^{-2}$.

und damit haben wir

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &\overset{(*)}{=} \operatorname{Re}\,((\underbrace{\cos\theta}_{=\alpha}+i\underbrace{\sin\theta}_{=\beta})^n = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}i^k\beta^k = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}i^k\beta^k \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\alpha^{n-2k}(-1)^k\beta^{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2k}(-1)^k\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{2k} \\
&= 3^{-n}\underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}(-8)^k}_{=\gamma_n}
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
\sin n\theta &= \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}i^k\beta^k = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ ungerade}}}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}i^k\beta^k \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}\alpha^{n-(2k+1)}(-1)^k\beta^{2k+1} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3^n}\right)\underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}(-8)^k}_{=\delta_n}.
\end{aligned}$$

Es ist $(-8)^k \equiv 1^k \equiv 1 \mod 3$ und wir haben

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}+(-1)^k\binom{n}{k}\right) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{n} 2\binom{n}{k} \\
&\implies 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k} \text{ und wegen } 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \text{ folgt} \\
2^{n-1} &= 2^n - 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\gamma_n \equiv \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}(-8)^k \equiv \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k} \equiv 2^{n-1} \not\equiv 0 \mod 3,$$

$$\delta_n \equiv \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}(-8)^k \equiv \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1} \equiv 2^{n-1} \not\equiv 0 \mod 3.$$

Falls nun $n < 0$ gilt, haben wir wegen

$$\cos(n\theta) = \cos(|n|\theta) \text{ und } \sin(n\theta) = -\sin(|n|\theta)$$

und der Tatsache, dass $(\mathbb{Z}_3\backslash\{0\},\cdot)$ eine Gruppe bildet, ebenfalls

$$\gamma_n \equiv \sum_{k=0}^{[\frac{|n|}{2}]} \binom{|n|}{2k}(-8)^k \not\equiv 0 \mod 3,$$

$$\delta_n \equiv \underbrace{(-1)}_{\not\equiv 0 \mod 3} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{|n|-1}{2}]} \binom{|n|}{2k+1}(-8)^k}_{\not\equiv 0 \mod 3} \not\equiv 0 \mod 3.$$

Damit ist nun (3.2) gezeigt.

Um die Aussage des Beispiels zu beweisen, genügt es nach Lemma 3.1.8 zu zeigen, dass es kein Wort W bestehend aus σ und τ gibt, das ε ergibt. Dazu ist es ausreichend nachzuweisen, dass es ein $x \in \mathbb{R}^3$ in der Weise gibt, dass $Wx \neq x$. Sei nun $w = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \ldots\ z_l^{a_l}$ ein beliebiges Wort mit $z_k \in \{\sigma,\tau\}, z_k \neq z_{k+1}, a_k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und bezeichne $x = (0,0,1)^T$. Wir wollen nun nachweisen, dass wx von einer speziellen Struktur ist, nämlich dass gilt

$$wx = 3^{-N}\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{Z} \text{ und } N := \sum_{m=1}^{l} |a_m|, \text{wobei } 3 \mid c \text{ falls } z_1 = \sigma \text{ und } 3 \mid a \text{ falls } z_1 = \tau. \tag{3.3}$$

Wir benutzen vollständige Induktion über N.

- IA: Für $N = 1$ ist entweder $w = \sigma^{\pm 1}$ oder $w = \tau^{\pm 1}$ und damit ergibt sich wx zu entweder $(0,0,1)^T = \frac{1}{3}(0,0,3)^T$ oder zu $(0,\mp\beta,\alpha) = \frac{1}{3}(0,\mp 2\sqrt{2},1)^T$. Damit sind die Bedingungen von (3.3) erfüllt.

- IV: Gelte Behauptung (3.3) für alle $N \leq n$.

- IS: Sei nun $N = n+1$. Wir haben mit der Induktionsvoraussetzung

  $$z_1^{a_1-\operatorname{sign}(a_1)} z_2^{a_2} \ldots z_l^{a_l} x = 3^{-N}\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix}$$

  mit Eigenschaften wie in (3.3). Damit ist falls $z_1 = \sigma$ gilt:

  $$wx = \sigma^{\operatorname{sign}(a_1)}\ 3^{-N+1}\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} = 3^{-N}\begin{pmatrix} a - \operatorname{sign}(a_1)4b \\ (\operatorname{sign}(a_1)2a + b)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \text{ mit } 3 \mid 3c$$

  und falls $z_1 = \tau$ ist

  $$wx = \tau^{\operatorname{sign}(a_1)} 3^{-N+1}\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} = 3^{-N}\begin{pmatrix} 3a \\ (b - \operatorname{sign}(a_1)2c)\sqrt{2} \\ \operatorname{sign}(a_1)4b + c \end{pmatrix} \text{ mit } 3 \mid 3a.$$

  Wir haben also (3.3) gezeigt.

Das können wir nun benutzen um zu zeigen, dass gilt

$$3 \nmid b, \text{ falls } z_l = \tau. \tag{3.4}$$

Dies bedeutet, dass $b \neq 0$ ist und damit $wx \neq x$ in diesem Fall. Wir benutzen Induktion über l, um diese Aussage zu beweisen.

- IA: Im Fall $l = 1$ ist $w = \tau^{a_1}$ und mit unserer vorherigen Feststellung (3.3) erhalten wir sofort

$$\tau^{a_1} x = 3^{-|a_1|} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2}\gamma_{a_1} \\ \delta_{a_1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma_{a_1}, \delta_{a_1} \in \mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}.$$

- IV: Gelte die Behauptung für alle $n \leq l'$.

- IS: Sei w nun ein Wort mit $l = l' + 1$. Falls $z_1 = \sigma$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} wx &\overset{(3.3)}{=} \sigma^{a_1} 3^{-N+|a_1|} \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} \\ &\overset{(3.2)}{=} 3^{-N} \begin{pmatrix} \gamma_{a_1} & -\operatorname{sign}(a_1) 2\sqrt{2}\delta_{a_1} & 0 \\ \operatorname{sign}(a_1) 2\sqrt{2}\delta_{a_1} & \gamma_{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{|a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} \\ &= 3^{-N} \begin{pmatrix} \gamma_{a_1} a - \operatorname{sign}(a_1)\delta_{a_1} 4b \\ (\operatorname{sign}(a_1) 2\delta_{a_1} a + \gamma_{a_1} b)\sqrt{2} \\ 3^{|a_1|} c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

  wobei $3 \nmid (\operatorname{sign}(a_1)2\delta_{a_1} a + \gamma_{a_1} b)$, da $3 \mid a$ wegen (3.3) und $3 \nmid b$ aufgrund der IV.

  Falls $z_1 = \tau$ folgt analog:

$$\begin{aligned} wx &= 3^{-N} \begin{pmatrix} 3^{|a_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{a_1} & -\operatorname{sign}(a_1) 2\sqrt{2}\delta_{a_1} \\ 0 & \operatorname{sign}(a_1) 2\sqrt{2}\delta_{a_1} & \gamma_{a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} \\ &= 3^{-N} \begin{pmatrix} 3^{|a_1|} a \\ (\gamma_{a_1} b - \operatorname{sign}(a_1) 2\delta_{a_1} c)\sqrt{2} \\ \operatorname{sign}(a_1) 4\delta_{a_1} b + \gamma_{a_1} c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

  und es gilt $3 \nmid (\gamma_{a_1} b - \operatorname{sign}(a_1)2\delta_{a_1} c)$, da wie eben $3 \mid c$ wegen (3.3) und $3 \nmid b$ nach IV. Damit ist (3.4) gezeigt.

Wir wissen also nun, dass $wx \neq x$, falls $z_l = \tau$ gilt. Sei nun $w = z_1^{a_1} ... z_l^{a_l}$ ein Wort mit $z_l = \sigma$. Falls $l = 1$ gilt, haben wir $w = \sigma^{a_1}$ und es ist mit Blick auf (3.2) $wx \neq x$ wenn wir z.B. $x = (1, 0, 0)^T$ wählen. Sei nun $l \neq 1$. Angenommen, $w = \varepsilon$. Dann hätten wir

$$\sigma^{a_l} w \sigma^{-a_l} (0, 0, 1)^T = (0, 0, 1)^T,$$

ein Widerspruch, da $\sigma^{a_l} w \sigma^{-a_l} = \sigma^{a_l} z_1^{a_1} ... z_{l-2}^{a_{l-2}} \tau^{a_{l-1}}$ und damit (3.4) darauf angewendet werden kann. Also ist die durch σ und τ erzeugte Gruppe G frei. □

Definition 3.1.10 (Bahn)
Sei G eine Gruppe, die von links auf einer Menge X operiert (d.h. es gibt eine Abbildung $* : G \times X \to X$ mit $(gh) * x = g * (h * x)$ und $\varepsilon * x = x \; \forall g, h \in G \; \forall x \in X$) und sei $x \in X$. Dann heißt die Menge $Gx := \{g * x \in X \mid g \in G\}$ die **Bahn** von x unter G.

Lemma 3.1.11 Sei G eine Gruppe, die von links auf einer Menge X operiert. Dann ist die Relation B über X gemäß

$$xBy \; :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \; x \in Gy$$

mit $x, y \in X$ eine Äquivalenzrelation und die Menge aller Bahnen Gx sind deren Äquivalenzklassen. Insbesondere stellt die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich B eine Zerlegung von X dar, und zwei verschiedene Bahnen sind disjunkt.

Beweis. Wenn B eine Äquivalenzrelation ist, sind die Bahnen offensichtlich deren Äquivalenzklassen und diese bilden bekanntermaßen eine Zerlegung von X. Wir prüfen schnell die Eigenschaften der Äquivalenzrelation:

1. Reflexivität: $x \in Gx\ \forall x \in X$, da $\varepsilon * x = x \in Gx$ ist.

2. Symmetrie: Sei $x \in Gy$, also gibt es ein $g \in G$ mit $x = g * y$, daher ist $g^{-1} * x = \varepsilon * y = y \implies y \in Gx$.

3. Transitivität: Seien $x, y, z \in X$ mit $xBy,\ yBz$. Dann gibt es $g, h \in G$ mit $x = g*y$ und $y = h*z$. Also erhalten wir durch Einsetzen $x = g * (h * z) = (gh) * z$ und damit xBz.

Damit ist B eine Äquivalenzrelation. □

Satz 3.1.12 (Zerlegung einer freien Gruppe)
Sei G eine freie Gruppe, die von $E = \{\sigma, \tau\}$ erzeugt wird. Dann gibt es eine Zerlegung H_1, H_2, H_3, H_4 von G so, dass

$$1.\ G = \sigma^{-1}H_1 \cup H_2, \qquad 2.\ \sigma^{-1}H_1 \cap H_2 = \emptyset,$$
$$3.\ G = \tau^{-1}H_3 \cup H_4, \qquad 4.\ \tau^{-1}H_3 \cap H_4 = \emptyset,$$

gilt, wobei $\sigma^{-1}H_1 := \{\sigma^{-1}h \mid h \in H_1\}$ gesetzt wird (analog für $\tau^{-1}H_3$).

Beweis. Wir setzen

$$H_1 := W(\sigma)\backslash\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\},\ H_2 := W(\sigma^{-1}) \cup \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varepsilon\},\ H_3 := W(\tau) \text{ und } H_4 := W(\tau^{-1}).$$

Man sieht sofort, dass diese Mengen disjunkt sind und eine Zerlegung von G bilden. Es ist

$$\sigma^{-1}H_1 = \sigma^{-1}(W(\sigma)\backslash\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = G\backslash(W(\sigma^{-1}) \cup \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\epsilon\}) = G\backslash H_2$$

und

$$\tau^{-1}H_3 = \tau^{-1}W(\tau) = G\backslash W(\tau^{-1}) = G\backslash H_4.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 3.1.13 Sei G eine freie, von $E = \{\tau, \sigma\}$ erzeugte Gruppe mit neutralem Element ε, die auf X von links *eindeutig* in der Weise operiert, dass $\forall g \in G, x \in X$:

$$gx = x \implies g = \varepsilon.$$

Dann gibt es eine Zerlegung A_1, A_2, A_3, A_4 von X so, dass

$$1.\ X = \sigma^{-1}A_1 \cup A_2, \qquad 2.\ \sigma^{-1}A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$
$$3.\ X = \tau^{-1}A_3 \cup A_4, \qquad 4.\ \tau^{-1}A_3 \cap A_4 = \emptyset,$$

gilt.

Beweis. Sei $O := \{Gx \mid x \in X\}$ die Menge aller Bahnen von X unter G. Jede Bahn ist nichtleer und daher können wir mit dem *Auswahlaxiom* eine Auswahlfunktion $f : O \to \bigcup O$ finden. Setze $R := f(O)$, wobei also jedes Element $r \in R$ den einzigen Repräsentanten der Bahn Gr, der in R liegt, darstellt. Wir haben damit $GR = X$. Seien die Mengen $H_1, H_2, H_3, H_4 \subset G$ wie in 3.1.12 beschrieben gewählt. Wir setzen nun

$$A_j := H_jR \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Wir zeigen nun $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$. Wäre es nicht so, gäbe es $g \in H_j, h \in H_k$ und $r_1, r_2 \in R$ mit $gr_1 = hr_2$. Da verschiedene Bahnen disjunkt sind, kann nur $r_1 = r_2 =: r$ gelten. Damit haben wir

$$gr = hr \implies h^{-1}\, gr = r \xRightarrow{\text{Eindeutigk.}} h^{-1}g = \varepsilon \implies h = g,$$

ein Widerspruch, da H_j und H_k disjunkt sind. Analog lässt sich unter Ausnutzung von 3.1.12 zeigen, dass 2. und 4. erfüllt sind. Sei nun $x \in X$ beliebig. Wir zeigen $\sigma^{-1}A_1 \cup A_2 = X$. Es gibt ein $g \in G$ und $r \in R$ mit $gr = x$. Wegen 3.1.12 gibt es entweder ein $h \in H_1$ oder $h \in H_2$ derart, dass entweder $\sigma^{-1}h = g$ oder $h = g$ gilt. Damit haben wir $x \in \sigma^{-1}H_1 \cup H_2$. Analog weist man 3. nach.

□

Wir wenden uns jetzt dem konkreten Beispiel der Kugel im $\mathbb{R}^n$ und den Drehungen als darauf definierter Gruppenoperation zu.

Satz 3.1.14 (Vernachlässigbarkeit abzählbarer Mengen)
Sei S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und $D \subseteq S^2$ mit $|D| \leq \aleph_0$ eine beliebige Menge. Dann gilt:

$$S^2 \overset{z}{\sim} S^2 \backslash D.$$

Dabei können die zwischen den Zerlegungen vermittelnden Bijektionen so gewählt werden, dass sie nur aus Drehungen um den Nullpunkt bestehen.

Beweis. Wir wissen, dass

$$\aleph_0 < |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| \overset{(1.3.3)}{=} |2^{\mathbb{N}\times\{0,1\}}| \overset{(1.3.3)}{=} |\mathbb{R}^{\{0,1\}}| = |\mathbb{R}^2| = |S^2|$$

gilt[5], daher gilt auch $|S^2\backslash D| > \aleph_0$. Wäre es nicht so, wäre $S^2\backslash D$ abzählbar. Da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist, hätten wir $|S^2| = |(S^2\backslash D) \cup D| = \aleph_0$, ein Widerspruch.

Wir wollen nun eine Drehung h der Einheitssphäre um den Nullpunkt so finden, dass

$$\forall n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m : h^n(D) \cap h^m(D) = \emptyset$$

gilt, wobei $h^0 := Id$ definiert werde. Zu einer gegebenen Drehung h um den Nullpunkt bezeichnen wir als Drehachse im Folgenden jeden Vektor v, für den $h(v) = v$ gilt. Zuerst einmal ist klar, dass die Drehung h nicht als Drehachse einen Punkt d aus D haben kann, denn sonst wäre $h^n(d) = d\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Ebensolches gilt für $-d$. Es bleiben aber noch überabzählbar viele Punkte auf der Sphäre übrig, die als Drehachse für h infrage kommen, da $|S^2\backslash(D \cup (-D))| > \aleph_0$ mit $-D := \{-d \mid d \in D\}$ gilt. Wähle nun einen solchen Vektor $A \in S^2\backslash(D \cup (-D))$ aus. Seien $d_1, d_2 \in D$ und bezeichne mit

$$H^A_{d_1,d_2} := \{g \in SO(3) \mid g \text{ hat als Drehachse } A \text{ und } \exists z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : g^z(d_1) = d_2\}.$$

Wenn d_1 und d_2 nicht in einer Ebene liegen, deren Normalenvektor A ist, gibt es keine Drehung, die d_1 nach d_2 befördert und damit ist $H^A_{d_1,d_2}$ in diesem Fall leer. Sei nun $H^A_{d_1,d_2}$ nichtleer. Sei $\phi \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $h_{\phi,A}$ eine Drehung um den Winkel ϕ mit Drehachse A, wobei die Drehung so erfolge, dass der Vektor A zum Betrachter zeigt und im mathematisch positiven Sinn gedreht wird[6]. Da d_1 und d_2 in einer Ebene mit Normalenvektor A liegen, gibt es einen Winkel ϕ, für den gilt: $h_{\phi,A}(d_1) = d_2$. Es sei darauf hingewiesen, dass wir auch $d_1 = d_2$ zulassen und der Winkel ϕ dann folglich 0 ist.

Sei nun $g \in H^A_{d_1,d_2}$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mit $g^z(d_1) = d_2$. Es gibt auch ein $\psi \in \mathbb{R}$ mit

[5] Man denke z.B. an die stereographische Projektion zwischen S^2 und $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, bei der jeder Punkt der Ebene auf denjenigen Punkt der Sphäre abgebildet wird, der auf der Verbindungsgeraden zwischen dem Punkt und $(0,0,1)$ liegt; um eine Bijektion zu erhalten, wird ∞ als Element eingeführt und auf $(0,0,1)$ abgebildet. Es ist klar, dass $|\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}| = |\mathbb{R}^2|$ gilt.

[6] Diese Formulierung ist lästig aber notwendig, um die betrachteten Drehungen eindeutig zu charakterisieren und $h_{\phi,A}$ als mathematisches Objekt nicht „in der Luft“ hängen zu lassen. Es spielt im weiteren Verlaufe jedoch keine Rolle mehr, ob links oder rechts gedreht wird.

$h_{\psi,A} = g$. Wir haben nun

$$\begin{aligned}
& h_{\phi,A}(d_1) = d_2 = g(d_1)^z = h^z_{\psi,A}(d_1) = h_{z\cdot\psi,A}(d_1) \\
\Longrightarrow\quad & \forall k \in \mathbb{Z} : h_{\phi+k\cdot 2\pi,A}(d_1) = h_{z\cdot\psi,A}(d_1) \\
\Longrightarrow\quad & \forall k \in \mathbb{Z} : h_{\frac{\phi}{z}+\frac{k\cdot 2\pi}{z},A}(d_1) = h_{\psi,A}(d_1) \\
\Longrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z} : \psi = \frac{\phi}{z} + \frac{k\cdot 2\pi}{z} \\
\Longrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z} : g = h_{\frac{\phi}{z}+\frac{k\cdot 2\pi}{z},A}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$H^A_{d_1,d_2} = \left\{ h_{\psi,A} \in SO(3) \mid k, z \in \mathbb{Z},\ z \neq 0,\ \psi = \frac{\phi}{z} + \frac{k\cdot 2\pi}{z} \right\}$$

und wir haben eine surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{Z} \to H^A_{d_1,d_2},\ (z,k) \mapsto h_{\frac{\phi}{z}+\frac{k\cdot 2\pi}{z},A}.$$

Wir erhalten daher

$$\aleph_0 = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}\backslash\{0\}\times\mathbb{Z}| \geq |H^A_{d_1,d_2}|.$$

Definiere nun

$$H_{D,D} := \bigcup_{(d_1,d_2)\in D\times D} H^A_{d_1,d_2}.$$

Da dies eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist, gilt auch

$$|H_{D,D}| = \aleph_0.$$

Man beachte, dass $H_{D,D}$ alle Drehungen um einen rationalen Winkel beinhaltet (jedes H_{d_1,d_1} beinhaltet alle diese Drehungen). Setze $H := \{h_{\psi,A} \in SO(3) \mid \psi \in (0, 2\pi)\}$ und betrachte die offensichtlich bijektive Abbildung

$$f : (0, 2\pi) \to H,\ \psi \to h_{\psi,A}.$$

Wir haben $|H| = |(0, 2\pi)| = |\mathbb{R}| > \aleph_0$ und es ergibt sich

$$|H\backslash H_{D,D}| > \aleph_0.$$

Damit ist $H\backslash H_{D,D}$ nichtleer und wir können ein $h \in H\backslash H_{D,D}$ herausnehmen. Wir zeigen jetzt, dass dieses h die Bedingung

$$\forall z, k \in \mathbb{Z}, z \neq k : h^z(D) \cap h^k(D) = \emptyset$$

erfüllt. Wäre es nicht so, gäbe es $d_1, d_2 \in D$ und $z, k \in \mathbb{Z}, z \neq k$ so, dass $h^z(d_1) = h^k(d_2)$ gilt. Dann haben wir

$$h^{z-k}(d_1) = d_2 \implies h \in H_{d_1,d_2} \subseteq H_{D,D},$$

im Widerspruch zu $h \notin H_{D,D}$. Setze nun $P := \{h^n(D) \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. Wir haben $D \cap P = \emptyset$, daher ist $P \subseteq S^2\backslash D$. Wir stellen außerdem fest: $h^{-1}(P) = D \cup P$. Die Menge D wird sozusagen aus dem „Nichts", nur durch eine Drehung, erzeugt. Definiere noch Zerlegungen von $S^2\backslash D$ und S^2:

$$a_1 := (S^2\backslash D)\backslash P, \quad a_2 := P, \quad b_1 := S^2\backslash(P \cup D) \quad b_2 := P \cup D$$

und Abbildungen, die ausschließlich aus Drehungen bestehen:

$$f_1 : a_1 \to b_1 = a_1,\ f_1 = Id, \quad f_2 : a_2 \to b_2,\ a \mapsto h^{-1}(a).$$

Damit ergibt sich

$$f_2(a_2) = h^{-1}(a_2) = h^{-1}(P) = D \cup P = b_2$$

und f_1, f_2 sind Bijektionen, womit

$$S^2 \overset{z}{\sim} S^2 \backslash D$$

folgt. □

Satz 3.1.15 Sei S^2 die Einheitssphäre und $G \subset SO(3)$ eine Teilmenge der Drehgruppe mit neutralem Element ε, die von $E = \{\sigma, \tau\}$ erzeugt wird. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $D \subset S^2$ derart, dass die Gruppe G *eindeutig* wie in 3.1.13 beschrieben auf $S^2 \backslash D$ operiert, also dass gilt

$$\forall g \in G \; \forall x \in S^2 \backslash D : (gx = x \implies g = \varepsilon).$$

Beweis. Um die gewünschte Eindeutigkeit der Gruppenoperation zu erreichen, genügt es alle $x \in S^2$ herauszunehmen, die Drehachse eines $g \in G$ sind. Wir stellen fest, dass G aus nur abzählbar vielen Wörtern und damit aus abzählbar vielen Elementen besteht. Jede Drehung $g \in G$ schließt genau zwei Elemente von S^2, die auf der Drehachse von g liegen, aus. Damit ist die Menge

$$K := \{x \in S^2 \mid \exists g \in G : x \text{ liegt in einer Drehachse von g}\}$$

abzählbar unendlich. Weiterhin ist jede Bahn $Gx \subset S^2$ nur abzählbar unendlich. Wir definieren

$$D := \bigcup_{x \in K} Gx.$$

Auch hier gilt $|D| \leq \aleph_0$, da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Nun bleibt zu zeigen, dass $S^2 \backslash D$ abgeschlossen bezüglich der Gruppenoperation ist. Angenommen

$$\exists x \in S^2 \backslash D, \; \exists g \in G : gx \in D.$$

Dann gibt es ein $k \in K$ mit $gx \in Gk$; x und k liegen also in derselben Bahn. Daher ist

$$x \in Gk \subseteq \bigcup_{k \in K} Gk = D,$$

im Widerspruch zu $x \in S^2 \backslash D$. □

Wir haben nun alle Instrumente beisammen und stoßen nun zum Beweis des eigentlichen Paradoxons vor.

Satz 3.1.16 (Banach-Tarski-Paradoxons)
Bezeichne mit $A = K^3$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Seien $B := A + (0,0,3)^T$ und $C := A + (0,0,-3)^T$. Dann gilt

$$A \overset{z}{\sim} (B \cup C).$$

Beweis. Zuerst werden wir eine auf eine gewisse Art „löchrige“ Einheitskugel in zwei ebensolche Kugeln zerlegen. Sei dazu $G \subset SO(3)$ die durch $E = \{\sigma, \tau\}$ erzeugte freie Gruppe wie in Beispiel 3.1.9 erklärt und wähle $D \subset S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ so, dass D abzählbar ist und G auf $S^2 \backslash D$ *eindeutig* operiert, wie es in Satz 3.1.15 beschrieben wird. Dann sind die Voraussetzungen für Satz 3.1.13 erfüllt und wir finden eine Zerlegung A_1, A_2, A_3, A_4 von $S^2 \backslash D$ mit

1. $S^2 \backslash D = \sigma^{-1} A_1 \cup A_2$,
2. $\sigma^{-1} A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
3. $S^2 \backslash D = \tau^{-1} A_3 \cup A_4$,
4. $\tau^{-1} A_3 \cap A_4 = \emptyset$.

Wir haben bis jetzt nur die Sphäre betrachtet und erweitern jetzt die Untersuchung auf die (löchrige) Kugel. Bezeichne

$$A' := (0,1](S^2 \backslash D) := \{r \cdot s \in A \mid r \in (0,1], \; s \in S^2 \backslash D\}.$$

In analoger Weise definiere

$$A'_1 := (0,1]A_1, \quad A'_2 := (0,1]A_2, \quad A'_3 := (0,1]A_3, \quad A'_4 := (0,1]A_4.$$

Wir stellen fest, dass $(A_i)_{i=1}^4$ eine Zerlegung von A' ist und weiterhin gilt:

1. $A' = \sigma^{-1}A_1' \cup A_2'$,
2. $\sigma^{-1}A_1' \cap A_2' = \emptyset$,
3. $A' = \tau^{-1}A_3' \cup A_4'$,
4. $\tau^{-1}A_3' \cap A_4' = \emptyset$,

und definieren folgende Bijektionen, die offensichtlich nur aus einer endlichen Anzahl Verschiebungen und Drehungen zusammengesetzt sind:

$$\begin{array}{lll} f_1: & A_1' \to \sigma^{-1}A_1' + (0,0,3), & a \mapsto \sigma^{-1}a + (0,0,3); \\ f_2: & A_2' \to A_2' + (0,0,3), & a \mapsto a + (0,0,3); \\ f_3: & A_3' \to \tau^{-1}A_3' - (0,0,3), & a \mapsto \tau^{-1}a - (0,0,3); \\ f_4: & A_4' \to A_4' - (0,0,3), & a \mapsto a - (0,0,3). \end{array}$$

und damit ist

$$A_1' \overset{z}{\sim} \sigma^{-1}A_1' + (0,0,3),\ A_2' \overset{z}{\sim} A_2' + (0,0,3),\ A_3' \overset{z}{\sim} \tau^{-1}A_3' - (0,0,3),\ A_4' \overset{z}{\sim} A_4' - (0,0,3).$$

Wir setzen

$$f_1(A_1') \cup f_2(A_2') = A' + (0,0,3) =: B', \quad f_3(A_3') \cup f_4(A_4') = A' - (0,0,3) =: C'$$

und zusammen mit Lemma 3.1.4 haben wir nun

$$A' \overset{z}{\sim} (B' \cup C')$$

gezeigt. Mit Satz 3.1.14 wissen wir, dass

$$S^2 \backslash D \overset{z}{\sim} S^2$$

gilt und darum gibt es Zerlegungen $(a_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(S^2\backslash D), (b_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(S^2)$ mit Drehungen um den Nullpunkt $f_i : a_i \to b_i, i \in \mathbb{N}_{1,n}$, die Bijektionen sind. Wir definieren diese Zerlegungen und Bijektionen nun so um, dass sie mit A' kompatibel werden. Zuerst einmal wollen wir den Definitionsbereich und Wertebereich der Drehungen f_i auf ganz $\mathbb{R}^n$ erweitern; wir tun dies ohne Einführung einer neuen Bezeichnung, sondern verwenden f_i weiter. Setze für jedes $i \in \mathbb{N}_{1,n}$:

$$\alpha_i := (0,1]a_i, \quad \beta_i := (0,1]b_i,$$

$$F_i := \{(x, f_i(x)) \mid x \in \alpha_i\}.$$

Zuerst einmal erinnern wir daran, dass für uns Abbildungen Relationen sind, siehe Definition 1.1.8. Damit ist F_i eine Abbildung. Es ist weiterhin klar, dass $(\alpha_i)_{i=1}^n$ eine Zerlegung von A' und $(\beta_i)_{i=1}^n$ eine Zerlegung von $A\backslash\{0\}$ ist. Im Folgenden weisen wir nach, dass die F_i Bijektionen sind, die nur aus Drehungen bestehen und zwischen den Zerlegungen $(\alpha_i)_{i=1}^n$ und $(\beta_i)_{i=1}^n$ vermitteln. Sei $r \in (0,1]$ beliebig. Falls M eine Menge ist, auf der r operiert, bezeichnen wir mit $rM := \{rm \mid m \in M\}$. Dann haben wir für jedes $i \in \mathbb{N}_{1,n}$:

$$F_i(ra_i) = \{f_i(ra) \mid a \in a_i\} = \{r(f_i(a)) \mid a \in a_i\} = r\{f_i(a) \in b_i \mid a \in a_i\} \overset{(f_i \text{ Bijekt.})}{=} rb_i$$

und damit gilt

$$F_i(\alpha_i) = F_i(\bigcup_{r\in(0,1]} ra_i) = \bigcup_{r\in(0,1]} F_i(ra_i) = \bigcup_{r\in(0,1]} rb_i = (0,1]b_i = \beta_i.$$

Seien $r_1, r_2 \in (0,1]$ und $x_1, x_2 \in a_i$ so, dass $F_i(r_1x_1) = F_i(r_2x_2)$ gilt. Wegen

$$r_1f_i(x_1) = f_i(r_1x_2) = F_i(r_1x_1) = F_i(r_2x_2) = f_i(r_2x_2) = r_2f_i(x_2)$$

erhalten wir sofort

$$r_1 = |r_1| = |r_1| \underbrace{\|f_i(x_1)\|}_{=1} = \|r_1 f_i(x_1)\| = \|r_2 f_i(x_2)\| = |r_2| \, \|f_i(x_1)\| = |r_2| = r_2$$

und damit gilt

$$r_1 f_i(x_1) = r_1 f_i(x_2) \implies f_i(x_1) = f_i(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

da Drehungen invertierbar sind. Also ist F_i bijektiv und wir erhalten

$$A' \overset{z}{\sim} A \backslash \{0\}.$$

Wir zeigen noch, dass $A \overset{z}{\sim} A\backslash\{0\}$ ist. Sei $p \in S^2$ beliebig. Wir können nun p in die 0 verschieben und erhalten $A\backslash\{0\} \overset{z}{\sim} A\backslash\{p\}$. Weiterhin wissen wir wegen Satz 3.1.14, dass $S^2\backslash\{p\} \overset{z}{\sim} S^2$ ist. Wir können nun $A\backslash\{p\}$ in $A\backslash S^2$ und $S^2\backslash\{p\} \overset{z}{\sim} S^2$ zerlegen und erhalten mit Lemma 3.1.4 insgesamt

$$A' \overset{z}{\sim} A\backslash\{0\} \overset{z}{\sim} A\backslash\{p\} = A\backslash S^2 \cup S^2\backslash\{p\} \overset{z}{\sim} A\backslash S^2 \cup S^2 = A.$$

Durch Verschiebung von B' und C' in den Ursprung erhalten wir außerdem $B' \overset{z}{\sim} B$ und $C' \overset{z}{\sim} C$ und damit folgt sogleich $B' \cup C' \overset{z}{\sim} B \cup C$ und schließlich

$$A \overset{z}{\sim} A' \overset{z}{\sim} B' \cup C' \overset{z}{\sim} B \cup C,$$

was zusammen mit der Transitivität der Zerlegungsäquivalenz die Aussage ergibt. □

Zum Schluss dieses Unterkapitels wollen wir noch auf das Maß- und Inhaltsproblem zu sprechen kommen.

Bemerkung 3.1.17 (Maß- und Inhaltsproblem)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Frage nach einer sinnvollen Zuordnung eines „Volumens“ zu einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist als Maßproblem bekannt. Anfang des 19. Jahrhunderts wollte man wissen, ob es eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ (ein sogenanntes *Maß*) gibt so, dass

1. Für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a_n \cap a_m = \emptyset \ \forall n \neq m$ gilt:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

2. Für alle Mengen $a, b \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \overset{z}{\sim} b$ gilt:
$$\mu(a) = \mu(b) \quad \text{(Zerlegungsinvarianz)}.$$

3. Es gilt:
$$\mu([0,1]^n) = 1 \quad \text{(Normiertheit)}.$$

Giuseppe Vitali konnte 1905 zeigen, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ keine Lösung dafür gibt. Damit war dieses Problem vom Tisch und die Frage nach Abschwächungen kam auf. Die als leichtes Maßproblem oder Inhaltsproblem bekannte Forderung schwächte die Bedingung 1. ab zu

1. Für alle $I \subset \mathbb{N}, |I| < \infty$ und alle endlichen Folgen $(a_n)_{n\in I}, a_n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a_n \cap a_m = \emptyset \ \forall n \neq m$ gilt:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in I}\right) = \sum_{n\in I} \mu(a_n) \quad \text{(endliche Additivität)}.$$

Eine solche Funktion nennt man *Inhalt* oder *Inhaltsfunktion*. Für $n = 1, 2$ gibt es eine Lösung für das leichte Maßproblem, wie Stephan Banach 1923 gezeigt hat (siehe [S B23] und [Bri96], S.143), allerdings gibt es keine explizit angebbare Inhaltsfunktion, so dass das gelöste leichte Maßproblem für $n = 1, 2$ anscheinend eher ein Kuriosum denn eine fruchtbare mathematische Erkenntnis darstellt. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten des leichten Maßproblems ist 1929 von J. von Neumann gefunden worden (siehe [Bri96], S.144), indem er zeigte, dass die Nichtauflösbarkeit der Gruppe der Drehungen und Verschiebungen ab Dimension 3 für diese Fragestellung entscheidend ist.

Aus dem eben bewiesenen Banach-Tarski-Paradoxon folgt andererseits sofort, dass für $n = 3$ die Bedingung der Zerlegungsinvarianz verletzt ist. Wenn A erneut die Einheitskugel und B und C die nach oben bzw. unten verschobene Einheitskugel bezeichnet haben wir notwendigerweise

$$\mu(A) = \mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) = \mu(A) + \mu(A) = 2\mu(A)$$

und daher muss $\mu(A) = 0$ sein. Dies widerspricht jedoch der Normiertheitsbedingung, da wir mit endlich vielen disjunkten Einheitskugelstücken den Einheitswürfel überdecken könnten, der dann notwendigerweise den Inhalt 0 hätte. Auch für höhere Dimensionen als 3 stellt sich das leichte Maßproblem als unlösbar heraus. Es genügt dafür, im Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons jedes Auftreten der Dimension 3 durch $n > 3$ zu ersetzen und die Drehmatrizen in der Hauptdiagonalen mit Einsen aufzufüllen. Interessanterweise genügt die beschränkte Auswahl $\mathcal{DC}$ nicht, um die Existenz einer nichtmeßbaren Menge zu beweisen, wie sie das Banach-Tarski-Paradoxon impliziert. Daher ist Banach-Tarski mit $\mathcal{ZF} + \mathcal{DC}$ nicht möglich. Siehe dafür auch [TW16], S. 299. Dahingegen reicht es spannenderweise aus, Hahn-Banach zu $\mathcal{ZF}$ hinzuzunehmen, um Banach-Tarski zu beweisen; siehe dazu [Sch97] S.151. Zu Hahn-Banach werden wir in Kapitel 4 noch mehr erfahren.

Aus diesen Schwierigkeiten heraus entwickelte sich schließlich das Lebesgue-Borel Maß, das nur auf einer echten Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert wird, der Borelschen σ-Algebra. Auf sie lässt sich das Banach-Tarski-Paradoxon selbstverständlich nicht mehr umarbeiten.

3.2 Ein Rätsel

Ein Professor der Universität Pisa, A. Maffei, bei dem ich 2014 eine Vorlesung zur Darstellungstheorie hörte, brachte eines Tages ein Rätsel mit in die Vorlesung, über das er damals inhaltlich sagte, dass Konsequenzen wie diese über die Verwendung des Auswahlaxioms nachdenklich stimmen sollten; daher halte ich es für nicht zu albern, es an dieser Stelle auszuführen. Dem Rätsel, das man auch in eine rein mathematische Form kleiden könnte, wodurch es aber ein wenig seiner Faszination einbüßen würde, geht eine kurze Geschichte voraus:

Wir stellen uns vor in einer Welt zu leben, die abzählbar unendlich viele Menschen und Dinge beherbergt. Mit Ausnahme dieser Besonderheit ist alles so wie wir es kennen. Menschen gehen zur Arbeit, trinken Kaffee oder begehen Verbrechen. Daher gibt es auch Gefängnisse, die in unserem Fall aber unendlich viele Insassen haben.

In einem der Gefängnisse ist einem Wärter langweilig geworden und er denkt sich ein perfides Spiel für die Insassen aus: Sie sollen sich alle in einer geraden Reihe aufstellen und in dieselbe Richtung gucken, dabei guckt der erste auf den Rücken des zweiten und so weiter. Der Wärter hat in seinem Lager unendlich viele schwarze und weiße Mützen, die er zufällig verteilt jedem Häftling aufzusetzen gedenkt. Bevor es das tut, erklärt er den Insassen seinen Plan: „Nachdem ich euch die Mützen aufgesetzt habe, beginnt der erste in der Reihe, seine Mützenfarbe zu raten. Ist sie richtig, darf er das Gefängnis verlassen, ansonsten bleibt er ein Jahr länger. Danach rät der zweite und immer so weiter. Ihr dürft euch vorher absprechen und dann setze ich euch die Mützen auf und es wird geschwiegen. Nur der aktuell Ratende darf eine Farbe nennen.“

Der Wärter rechnet sich aus, dass nach diesem Spiel immer noch unendlich viele Häftlinge das Gefängnis bewohnen werden, da ungefähr jeder Zweite mit seinem Tipp falsch liegen wird. Auf die fehlende Hälfte kommt es ihm nicht an, da der Gefängnisdirektor beim Durchzählen wieder nur auf unendlich viele Insassen kommen und damit keinen Unterschied zu vorher feststellen wird. Sein Job ist in keiner Weise in Gefahr. Nachdem sich die Häftlinge abgesprochen und in einer Reihe aufgestellt haben, beginnt der Wärter die schwarzen und weißen Mützen auf den Köpfen zu verteilen. Der erste Häftling beginnt und rät falsch. Der zweite auch. der dritte liegt richtig und darf gehen. Der vierte wieder nicht. So geht es den ganzen Nachmittag weiter, doch gegen Abend scheinen die Häftlinge eine Glückssträhne zu haben: ein ums andere Mal liegen sie richtig, ohne Fehler dazwischen. Der Wärter, *leicht beunruhigt, denkt: „Das Gesetz der großen Zahlen wird schon wieder für Ordnung sorgen!“ und wartet ab. Am nächsten Morgen steht der Direktor vor seiner Tür, mit der Kündigung in der Hand. Offensichtlich haben alle bis auf endlich viele Häftlinge richtig geraten.*

Frage: Wie konnten sich die Häftlinge vorbereiten, um mit Sicherheit alle bis auf endlich viele freizubekommen? Um dem Rätselliebhaber nicht zuvorzukommen, wird die Beantwortung der Frage verkehrt herum und auf der nächsten Seite abgedruckt.

Antwort:

Zuerst einmal zählen wir alle Häftlinge der Reihe nach, wie sie später stehen werden, durch und bezeichnen sie mit $1, 2, 3, ...$ usw. Weiters definieren wir eine Funktion $h : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, wobei $h(n) = h_n = 0/1$ bedeutet, dass Häftling n eine schwarze/weiße Mütze aufhat, nachdem der Wärter alle Mützen verteilt hat. Wir betrachten die Menge aller Folgen

$$M := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

und definieren eine Äquivalenzrelation auf M, indem wir für $a, b \in M$ setzen:

$$a \sim b \ :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \ \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n : a_k - b_k = 0.$$

Zwei Folgen sind also genau dann in derselben Äquivalenzklasse, wenn sie in allen bis auf endlich vielen Folgengliedern übereinstimmen. Wir können nun mit dem Auswahlaxiom eine Auswahlfunktion

$$f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} /_{\sim} \to \bigcup \{0, 1\}^{\mathbb{N}} /_{\sim}$$

finden, die von jeder Äquivalenzklasse auf einen Vertreter derselben abbildet. Die Häftlinge einigen sich auf f. In der Reihe stehend, sieht jeder Häftling n vor sich unendlich viele Mitinsassen und kennt demzufolge die Mützenfarbenfolge $h_{n+1}, h_{n+2}, ...$. Auch wenn Häftling n die ersten n Farben nicht kennt, gibt es doch nur genau eine Äquivalenzklasse $A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} /_{\sim}$, in der h aus Sicht des Häftlings n liegen kann, nämlich

$$A = [(0, ..., 0, h_{n+1}, h_{n+2}, h_{n+3}, ...)]_{\sim}.$$

Häftling n kennt die Funktion f und nimmt die konkrete Folge $f(A)$ zur Hand. Er sagt wenn er dran ist nun die Farbe, die bei $f(A)$ an der $n-$ten Stelle steht. Da es nun ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass wir für alle $k \geq n$ haben: $h_k = f(A)_k$, werden spätestens ab der $n-$ten Person alle Häftlinge richtig „raten“.

Kapitel 4

Über logische Zusammenhänge echt schwächerer Folgerungen von AC

Do not ask whether a statement is true
until you know what it means.

Errett Bishop

Dieses Kapitel dient der richtigen Einordnung von $\mathcal{AC}$ in Bezug auf echt schwächere Folgerungen desselben. Wir wollen insbesondere in Einzelfällen verstehen, welche echt schwächeren Folgerungen von $\mathcal{AC}$ bereits ausreichend sind, um zusammen mit $\mathcal{ZF}$ gewisse Theoreme zu beweisen, die sonst üblicherweise lediglich mit $\mathcal{AC}$ oder einer äquivalenten Formulierung bewiesen werden. Dabei werden wir ab und zu gezwungen sein, für Beweise auf die Literatur zu verweisen, um den Rahmen dieser Diplomarbeit nicht zu sprengen. Zur notationellen Vereinfachung setzen wir folgende Bezeichnungen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{HB} &:= \text{Hahn-Banach-Theorem,} \\
\mathcal{UF} &:= \text{Ultrafilterlemma,} \\
\mathcal{BPI} &:= \text{Boolescher Primidealsatz,} \\
\mathcal{LM} &:= \text{„Jede Menge des } \mathbb{R}^n \text{ ist Lebesgue-Meßbar“.}
\end{aligned}
$$

Zum Ultrafilterlemma ist zu sagen, dass wir mit $\mathcal{UF}$ die Version in 2.5.6 meinen, wovon der Satz 4.2.18 im Abschnitt über Verbände eine Verallgemeinerung ist (die wir mit $\mathcal{UF}_V$ abkürzen).

Wir orientieren uns in diesem Kapitel in Teilen an Eric Schechters „Handbook of Analysis and it's foundations“, siehe [Sch97]. Außerdem gibt [Rau02] eine gute Einführung in die mathematische Logik, der wir uns gegen Ende dieses Kapitels widmen werden.

4.1 Das Hahn-Banach-Theorem

Das Hahn-Banach-Theorem wird normalerweise nicht als abgeschwächtes Auswahlaxiom angesehen, doch ist es das in der Tat. Es lässt sich in $\mathcal{ZF}$ zeigen, dass[1]

$$(\mathcal{AC} \implies \mathcal{HB}) \wedge \neg(\mathcal{AC} \impliedby \mathcal{HB})$$

gilt, und damit kann man $\mathcal{HB}$ als „auf halbem Wege“ zwischen $\mathcal{ZFC}$ und $\mathcal{ZF}$ ansehen. Diese Fragestellungen wollen wir im letzten Abschnitt noch vertiefen. Wir wollen nun eine Formulierung des Satzes von Hahn-Banach nur unter Zuhilfenahme von $\mathcal{UF}$ beweisen, also ohne $\mathcal{AC}$.

[1] Wie wir später in diesem Abschnitt sehen werden, impliziert $\mathcal{UF}$ das Hahn-Banach-Theorem. Außerdem hat J.D. Halpern in [Hal64] gezeigt, dass $\mathcal{BPI}$ echt schwächer ist als $\mathcal{AC}$ und zusammen mit der Tatsache, dass $\mathcal{BPI} \iff \mathcal{UF}$ gilt, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, folgt die Aussage.

Definition 4.1.1 (Filterbasis)
Sei X eine Menge. Dann heißt $B \subseteq \mathcal{P}(X), B \neq \emptyset$ **Filterbasis**, falls gilt:

1. $\emptyset \notin F$,

2. $\forall B_1, B_2 \in B \; \exists B_3 \in B : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definition 4.1.2 (Limes Superior und Inferior mit Netzen)
Sei $(M, \preceq)$ eine gerichtete Menge[2] und $(x_m)_{m \in M},\ x_m \in [-\infty, \infty]$ ein Netz in $[-\infty, \infty]$[3]. Dann setzen wir

$$S_m := \sup_{m \preceq m'} x_{m'}, \quad I_m := \inf_{m \preceq m'} x_{m'}.$$

Das Netz $(S_m)_{m \in M}$ ist monoton fallend, das Netz $(I_m)_{m \in M}$ monoton steigend. Da $[-\infty, \infty]$ kompakt ist, konvergieren beide Netze und wir definieren

$$\limsup_{m \in M} x_m := \lim_{m \in M} S_m, \quad \liminf_{m \in M} x_m := \lim_{m \in M} I_m.$$

Lemma 4.1.3 (Filterbasis erzeugt Filter)
Sei X eine Menge und $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Filterbasis. Dann erzeugt B einen Filter F von X mit

$$F := \{M \subseteq X \mid \exists S \in B : S \subseteq M\}.$$

Beweis. Wir überprüfen die Filtereigenschaften.

1. Da $B \neq \emptyset$ gibt es ein $M \in B$ und damit ist $M \in F$. Wäre $\emptyset \in F$, müsste $\emptyset \in B$ gelten, im Widerspruch zur Definition.

2. Sei $N \supseteq M \in F$. Dann gibt es ein $S \in B$ mit $S \subseteq M \subseteq N$ und daher ist $N \in F$.

3. Seien $M_1, M_2 \in F$. Dann gibt es $S_1, S_2 \in B$ mit $S_1 \subseteq M_1$ und $S_2 \subseteq M_2$. Da B eine Filterbasis ist, gibt es ein $S_3 \in B$ mit $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$. Damit gilt $S_3 \subseteq M_1 \cap M_2$ und wir haben $M_1 \cap M_2 \in F$.

Somit ist F ein Filter. □

Beispiel 4.1.4 Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann erzeugt f mit $\mathcal{F}$ eine Filterbasis B in Y mit

$$B := f(\mathcal{F}) = \{f(m) \mid m \in \mathcal{F}\}.$$

Beweis. Wir weisen die Filterbasiseigenschaften nach:

1. Wäre $\emptyset \in B = f(\mathcal{F})$, so hätten wir $\emptyset \in \mathcal{F}$, ein Widerspruch zur Filterdefinition.

2. Seien $B_1, B_2 \in B$. Dann gibt es $m_1, m_2 \in \mathcal{F}$ so, dass $B_i = f(m_i), i = 1, 2$. Es ist auch $m_1 \cap m_2 \in \mathcal{F}$ und daher haben wir $f(m_1 \cap m_2) \in B$. Da $f(m_1 \cap m_2) \subseteq f(m_1) \cap f(m_2)$ gilt, sind wir fertig.

Somit ist alles gezeigt. □

Definition 4.1.5 (Bildfilter)
Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X gegeben. Dann nennen wir den durch die Filterbasis $f(X)$ eindeutig erzeugten Filter den **Bildfilter** von $\mathcal{F}$ unter f und schreiben auch $\mathcal{F}_f$ dafür.

Die Beweisidee des nächsten Satzes stammt aus [Sch97], S.455 f. Die Formulierung dieses Satzes ist äquivalent zu $\mathcal{HB}$, wie in derselben Quelle nachzulesen ist.

[2]Siehe Definition 2.7.5.
[3]Siehe hierzu auch Definition 2.7.6.

Satz 4.1.6 (Hahn-Banach: Existenz eines Banachlimes)
Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und bezeichne mit $B(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$. Dann gibt es eine lineare Funktion $L : B(I) \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall f \in B(I) : L(f) \leq \limsup_{i \in I} f(i).$$

Wir nennen L einen Banachlimes über $(I, \preceq)$.

Beweis. Wir benutzen im Beweis nur $\mathcal{ZF} + \mathcal{UF}$. Wir definieren folgende Menge:

$$D := \{S \subseteq I \mid S \supseteq \{i \in I \mid i_0 \preceq i\} \text{ für ein } i_0 \in I\}.$$

Dies ist ein Filter:

1. Offensichtlich ist $I \in D$ und $\emptyset \notin D$.

2. Sei $G \supset S \in D$. Dann gibt es ein i_0 so, dass $S \subseteq \{i \in I \mid i_0 \preceq i\}$ gilt. Damit ist auch $G \supseteq \{i \in I \mid i_0 \preceq i\}$ und wir haben $G \in D$.

3. Seien $S_1, S_2 \in D$. Dann gibt es i_1, i_2 mit $S_1 \supseteq \{i \in I \mid i_1 \preceq i\}$ und $S_2 \supseteq \{i \in I \mid i_2 \preceq i\}$. Da I eine gerichtete Menge ist, gibt es ein $i_3 \in I$ mit $i_1 \preceq i_3$ und $i_2 \preceq i_3$. Damit ist $S_3 := \{i \in I \mid i_3 \preceq i\} \in D$ mit $S_3 \subseteq S_1$ und $S_3 \subseteq S_2$. Daher haben wir $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$ und es ist also auch $S_1 \cap S_2 \in D$.

Mit $\mathcal{UF}$ können wir nun einen Ultrafilter U finden, der eine Verfeinerung von D ist.

Sei $f \in B(I)$ und betrachte den Bildfilter U_f von U unter f. Wir zeigen nun, dass es sich dabei wiederum um einen Ultrafilter handelt und benutzen dazu die Charakterisierung der Ultrafilter von 2.5.9. Sei $M \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Da U ein Ultrafilter ist, haben wir entweder $f^{-1}(M) \in U$ oder $I \backslash f^{-1}(M) \in U$ und wegen $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$ und $f(I \backslash f^{-1}(M)) \subseteq \mathbb{R} \backslash M$ und da U_f ein Filter ist, liegt somit entweder M oder $\mathbb{R} \backslash M$ in U_f und wir haben die Ultrafiltereigenschaft von U_f gezeigt.

Da f beschränkt ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f : I \to [a, b]$ ist. Wegen $[a, b]$ hausdorffsch und kompakt, wissen wir mit 2.5.15, dass U_f in $[a, b]$ eindeutig gegen ein $x \in [a, b]$ konvergiert und wir setzen[4]

$$U_f \xrightarrow{\tau} x =: \lim_U f.$$

Für jede Umgebung p von $\lim_U f$ gibt es also ein $u \in U$ so, dass $f(u) \subseteq p$ gilt. Wir können nun $\lim_U$ als einen Operator

$$\lim_U : B(I) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \lim_U f$$

auffassen und weisen die Linearität von $\lim_U$ nach. Seien dazu $f, g \in B(I)$ gegeben. Wir weisen nach, dass $\lim_U f + \lim_U g = \lim_U (f + g)$ gilt und benutzen dazu die Charakterisierung der Filterkonvergenz durch Umgebungsbasen wie in 2.5.13 dargestellt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in U$ so, dass

$$f(u_1) \subseteq (\lim_U f - \varepsilon, \lim_U f + \varepsilon), \quad g(u_2) \subseteq (\lim_U g - \varepsilon, \lim_U g + \varepsilon)$$

gilt. Da U ein Filter ist, gilt $u := u_1 \cap u_2 \in U$. Für jedes $x \in u$ gilt damit

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \in (\lim_U f-\varepsilon, \lim_U f+\varepsilon)+(\lim_U g-\varepsilon, \lim_U g+\varepsilon) = (\lim_U f+\lim_U g-2\varepsilon, \lim_U f+\lim_U g+2\varepsilon),$$

es ist

$$U_{f+g} \xrightarrow{\tau} (\lim_U f + \lim_U g)$$

und somit haben wir $\lim_U (f + g) = \lim_U f + \lim_U g$ gezeigt. Sei noch $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann haben wir

$$\lambda f(u_1) \subseteq \lambda(\lim_U f - \varepsilon, \lim_U f + \varepsilon) = (\lambda \lim_U f - \lambda\varepsilon, \lambda \lim_U f + \lambda\varepsilon)$$

[4] Mit τ sei hier die kanonische Topologie auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

und wir erhalten

$$U_{\lambda f} \xrightarrow{\tau} \lambda \lim_U f$$

und damit ist die Linearität gezeigt. Zum Abschluss weisen wir die Bedingung $\lim_U f \leq \limsup_{i\in I} f(i)$ nach. Wir definieren

$$S_f \in B(I),\ S_f(i) := \sup_{i \preceq i'} f(i').$$

Wir haben $\lim_{i\in I} S_f(i) = \limsup_{i\in I} f(i) =: S'_f$. Wir wollen nun sehen, dass $U_{S_f} \xrightarrow{\tau} S'_f$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da das Netz $(S_f(i))_{i\in I}$ gegen S'_f konvergiert, gibt es ein $i_0 \in I$ so, dass $\forall i \succeq i_0 : S_f(i) \in (S'_f - \varepsilon, S'_f + \varepsilon)$ ist. Für die Menge $u := \{i \in I \mid i_0 \preceq i\}$ gilt $u \in D \subseteq U$, $S_f(u) \in S_f(U) \subseteq U_{S_f}$ und wir haben $S_f(u) \subseteq (S'_f - \varepsilon, S'_f + \varepsilon)$ und damit

$$\lim_U S_f = \limsup_{i\in I} f(i)$$

gezeigt. Da $(f - S_f)(i) \leq 0\ \forall i \in I$ folgt $\lim_U(f - S_f) \leq 0$ und aufgrund der bereits nachgewiesenen Linearität von $\lim_U$ ergibt sich

$$\lim_U f \leq \lim_U S_f = \limsup_{i\in I} f(i)$$

und wir sind fertig. □

Bemerkung 4.1.7 Im gesamten vorherigen Beweis haben wir kein Auswahlaxiom benutzt, sondern lediglich das Ultrafilterlemma. Der Banachlimes ist des weiteren nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von dem Ultrafilter U ab, den uns $\mathcal{UF}$ liefert.

Der vorherige Satz zeigt, dass ein Banachlimes existiert. Diese Aussage ist eine äquivalente Form des Satzes von Hahn-Banach und in $\mathcal{ZF}$ äquivalent zu einigen anderen typischen Folgerungen aus dem Satz von Hahn-Banach. Beweise dazu finden sich in [Sch97], S. 318 ff.

Es ist bemerkenswert, dass der obige Satz ausreicht, um das Banach-Tarski-Paradoxon zu beweisen[5], was bedeutet, dass $\mathcal{HB}$ ausreicht, um $\neg\mathcal{LM}$ zu beweisen, wie in [FW91] gezeigt wird.

Weiterhin ist $\mathcal{HB}$ äquivalent zu einer abgeschwächten Form des Satzes von Banach-Alaoglu, siehe hierzu [JL 72], S.168.

Beispiel 4.1.8 Wir nehmen $I := \mathbb{N}$ und erhalten $B(I) = \ell^\infty$. Die Menge D wird damit zu

$$\{N \subseteq \mathbb{N} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : N \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n_0 \leq n\}\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{N}\backslash\{0\}, \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, ...\}.$$

Sei U nun mit $\mathcal{UF}$ ein beliebiger Ultrafilter, der den Filter D verfeinert. Wir stellen fest, dass U keine endliche Teilmenge p von $\mathbb{N}$ enthalten kann, da es sonst ein $n \in \mathbb{N}$ gibt so, dass

$$p \cap \underbrace{\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,n}}_{\in D \subseteq U} = \emptyset$$

gilt.

1. Wir betrachten $e = (1,1,1,...) \in \ell^\infty$. Die Filterbasis $e(U) = \{\{1\}\}$ erzeugt den Punktfilter $U_e = \mathfrak{U}(1)$, was ein Ultrafilter ist. Wir haben also $\mathfrak{U}(1) \xrightarrow{\tau} 1$ und damit $\lim_U e = 1$.

2. Sei $f \in \ell^\infty$ beliebig gegeben und konvergiere f gegen $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lim_U f = x$, wie wir jetzt zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall i > i_0 : f(i) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, und da $\{i \in \mathbb{N} \mid i > i_0\} \in D \subseteq U$ haben wir $f(u) \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ und damit ist klar, dass $U_f \xrightarrow{\tau} x$ gilt und wir haben $\lim_U f = x$.

Daher ist $\lim_U$ eine Verallgemeinerung des „klassischen“ Grenzwerts, der mit ihm für konvergente Folgen übereinstimmt. Oft ist genau die oben besprochene Einschränkung von I auf $\mathbb{N}$ gemeint, wenn man von Banachlimits spricht.

[5] Sch97, S. 151.

4.2 Der Boolesche Primidealsatz

Diesen Abschnitt wollen wir dem booleschen Primidealsatz ($\mathcal{BPI}$) widmen, der - wie zuvor $\mathcal{HB}$ - ein Zwischenglied zwischen $\mathcal{ZF}$ und $\mathcal{ZFC}$ darstellt. Wir werden sehen, dass $\mathcal{BPI}$ äquivalent zu $\mathcal{UF}$ und damit echt stärker als $\mathcal{HB}$ ist. Bevor wir zum Primidealsatz kommen können, wollen wir einige Verbandstheoretische Grundlagen legen.

Definition 4.2.1 (Verband)
Sei $(V, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Dann heißt V **Verband**, falls $\forall u, v \in V$ gilt:

$$\exists \inf\{u, v\} \in V, \ \exists \sup\{u, v\} \in V.$$

Wir definieren außerdem zweistellige Operationen $\sqcap, \sqcup$ auf V gemäß

$$u \sqcap v := \inf\{u, v\}, \ u \sqcup v := \sup\{u, v\}.$$

Wenn $W \subseteq V$ auch ein Verband ist, sprechen wir von einem **Teilverband** von V.

Beispiel 4.2.2 Sei M eine beliebige nichtleere Menge. Dann bildet $\mathcal{P}(M)$ den sogenannten Potenzmengenverband von M, der durch $\subseteq$ halbgeordnet ist.

Bemerkung 4.2.3 Verbände haben die Eigenschaft, dass man sie zugleich sowohl als Ordnungs- als auch als algebraische Struktur auffassen kann, wie der nächste Satz zeigt. Diese Dualität macht ihre Betrachtung besonders interessant.

Satz 4.2.4 (Verband als algebraische Struktur)
Sei V eine Menge und $\sqcup : V \times V \to V$, $\sqcap : V \times V \to V$ zwei Verknüpfungen auf V. Wir definieren eine Relation $\leq \subseteq V \times V$, indem wir $\forall u, v \in V$ setzen:

$$u \leq v \ :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \ u \sqcap v = u \ (\Longleftrightarrow \ u \sqcup v = v).$$

Dann ist $(V, \leq)$ ein Verband, wenn für alle $u, v, w \in V$ gelten:

- Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} u \sqcap (v \sqcap w) &= (u \sqcap v) \sqcap w, \\ u \sqcup (v \sqcup w) &= (u \sqcup v) \sqcup w. \end{aligned}$$

- Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} u \sqcap v &= v \sqcap u, \\ u \sqcup v &= v \sqcup u. \end{aligned}$$

- Absorptionsgesetze:

$$\begin{aligned} u \sqcap (u \sqcup v) &= u, \\ u \sqcup (u \sqcap v) &= u. \end{aligned}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir die behauptete Äquivalenz $u \sqcap v = u \Leftrightarrow u \sqcup v = v$. Gilt links, so haben wir $u \sqcup v = (u \sqcap v) \sqcup v \overset{(Abs.)}{=} v$ und analog für „ $\Longleftarrow$ “. Wir wollen zunächst die Eigenschaften einer Halbordnung nachweisen. Seien $u, v, w \in V$.

- Reflexivität: Es gilt mit dem Absorptionsgesetz $u \sqcap u = u \sqcap (u \sqcap (u \sqcup u)) = u$ und daher $u \leq u$.

- Transitivität: Gelte $u \leq v$, $v \leq w$. Daher haben wir $u \sqcap w = (u \sqcap v) \sqcap w = u \sqcap (v \sqcap w) = u \sqcap v = u$ und es ist $u \leq w$.

- Antisymmetrie: Seien $u \leq v$ und $v \leq u$. Dann haben wir $u = u \sqcap v = v \sqcap u = v$.

Wir weisen noch nach, dass $u \sqcap v = \inf\{u, v\}$, $u \sqcup v = \sup\{u, v\}$ gilt. Es gilt $u \sqcap v \leq u, v$, da $(u \sqcap v) \sqcap v = u \sqcap (v \sqcap v) \overset{(Refl.)}{=} u \sqcap v$, analog für u. Sei nun $w \leq u, y$. Dann haben wir $w \sqcap (u \sqcap v) \overset{(Ass.)}{=} (w \sqcap u) \sqcap v \overset{(w \leq u)}{=} w \sqcap v \overset{(w \leq v)}{=} = w$ und damit $w \leq u \sqcap v$, damit ist $u \sqcap v = \inf\{u, v\}$. Analog für sup. □

Bemerkung 4.2.5 Es lässt sich leicht nachrechnen, dass in einem Verband alle im vorherigen Satz aufgeführten Gesetze erfüllt sind, so dass wir Verbände tatsächlich immer von beiden Seiten betrachten können. Im Übrigen ist ein Verband durch die eben erfolgte algebraische Charakterisierung eine Varietät. Wir werden im Folgenden beide Sichtweisen parallel benutzen, je nachdem, was gerade nützlicher ist, und sowohl $(V, \leq)$ als auch $(V, \sqcup, \sqcap)$ schreiben, um denselben Verband zu bezeichnen.

Definition 4.2.6 (Distributiver Verband)
Sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband. Wir nennen V einen **distributiven** Verband, wenn $\forall u, v, w \in V$ gilt[6]:

$$\begin{aligned} u \sqcap (v \sqcup w) &= (u \sqcap v) \sqcup (u \sqcap w), \\ u \sqcup (v \sqcap w) &= (u \sqcup v) \sqcap (u \sqcup w). \end{aligned}$$

Definition 4.2.7 (Einselement, Nullelement)
Sei $(V, \leq)$ ein Verband. Wenn es ein größtes Element in V gibt, also ein $x \in V$ für das gilt:

$$\forall y \in V : y \leq x,$$

so nennen wir x das **Einselement** von V und bezeichnen es mit 1.
Wenn es ein kleinstes Element in V gibt, also ein $x \in V$ für das gilt:

$$\forall y \in V : x \leq y,$$

so nennen wir x das **Nullelement** von V und bezeichnen es mit 0.

Bemerkung 4.2.8 Wir können die Bezeichnung Einselement bzw. Nullelement auch dadurch rechtfertigen, dass

$$\forall x \in V : x \sqcap 1 = x \ \wedge \ x \sqcup 0 = x$$

gilt, falls 1 und 0 existieren. Damit ist 1 sozusagen das neutrale Element bezüglich $\sqcap$ und 0 das neutrale Element bezüglich $\sqcup$.

Definition 4.2.9 (Komplement, Komplementärer Verband)
Sei $(V, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband mit 1 und 0 und sei $x \in V$. Dann heißt $x' \in V$ **Komplement** von x, falls

$$x \sqcap x' = 0 \text{ und } x \sqcup x' = 1$$

gilt. Wir nennen V einen **komplementären Verband**, wenn jedes Element in ihm ein Komplement besitzt. Für jedes $x \in V$ bezeichne mit x' ab jetzt ein Komplement von x, falls es existiert.

Satz 4.2.10 In einem distributiven Verband V ist die Komplementierung eindeutig, d.h. falls es $0, 1 \in V$ gibt und zu einem $x \in V$ ein Komplement $x' \in V$ existiert, dann ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $x \in V$. Angenommen es gibt zwei Komplemente $x', \tilde{x} \in V$. Dann haben wir

$$x' = x' \sqcap \underbrace{(x \sqcup \tilde{x})}_{=1} = \underbrace{(x' \sqcap x)}_{=0} \sqcup (x' \sqcap \tilde{x}) = x' \sqcap \tilde{x} \text{ und analog } \tilde{x} = \tilde{x} \sqcap x'.$$

Daraus folgt

$$x' = x' \sqcap \tilde{x} = \tilde{x} \sqcap x' = \tilde{x}$$

und wir sind fertig. □

[6] Es lässt sich leicht zeigen, dass jedes der beiden Gesetze das jeweils Andere impliziert.

Definition 4.2.11 (Boolescher Verband/Algebra)
Ein Verband $(V, \leq)$ heißt **boolescher Verband** oder **boolesche Algebra**, wenn er distributiv und komplementär ist.

Bemerkung 4.2.12 Es ist klar aus dem vorherigen Satz, dass in einem booleschen Verband die Komplemente eindeutig sind. Die Begriffe boolescher Verband und boolesche Algebra sind austauschbar, jedoch will man damit jeweils den ordnungstheoretischen bzw. algebraischen Charakter der Struktur betonen.

Beispiel 4.2.13 Die einfachste boolesche Algebra ist durch unsere zweiwertige Logik mit Wahrheitswertmenge $\{wahr, falsch\}$ gegeben. Die Verbandsoperationen sind dabei folgende:

$$\sqcup := \vee; \ \sqcap := \wedge; \ ' := \neg.$$

Manchmal schreibt man für diesen Verband auch einfach „2“, wobei wir daran erinnern, dass $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Für jede nichtleere Menge M ist der Potenzmengenverband von M eine boolesche Algebra.

Wir kommen jetzt zu speziellen Teilmengen von Verbänden, den Idealen.

Definition 4.2.14 (Ideal, Primideal)
Sei $(V, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband. Eine Teilmenge I von V heißt **Ideal**, wenn folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in I \quad &: \quad u \sqcup v \in I, \\ \forall u \in I \ \forall v \in V \quad &: \quad v \leq u \implies v \in I. \end{aligned}$$

Wir nennen I ein **echtes Ideal**, wenn $\emptyset \subsetneq I \subsetneq V$ gilt.
Wenn I ein echtes Ideal ist, für das zusätzlich für alle $u, v \in V$ gilt:

$$u \sqcap v \in I \implies u \in I \vee v \in I,$$

so heißt I **Primideal**. Wenn V komplementär und I ein echtes Ideal ist, für das für alle $u \in V$ gilt:

$$\text{entweder } u \in I \text{ oder } u' \in I,$$

so heißt I **maximales Ideal**.

Bemerkung 4.2.15 Ein Ideal ist eine sogenannte „Unterhalbmenge“, was mit Blick auf die Bedingung

$$\forall u \in I \ \forall v \in V : v \leq u \implies v \in I$$

klar wird.

Der Begriff Ideal ist bereits aus der Ringtheorie bekannt. Wenn wir $\sqcup$ als „Addition“ und $\sqcap$ als „Multiplikation“ eines Ringes auffassen und beachten, dass wir die zweite Bedingung in der obigen Definition äquivalent auch so formulieren können[7]:

$$\forall u \in I, v \in V : u \sqcap v \in I,$$

so erhalten wir genau die Idealdefinition aus der Ringtheorie. Wir werden nun Teilmengen von Verbänden definieren, die wir *Filter* nennen. Filter in Verbänden sind *dual* zu Idealen; es genügt in der Definition von Idealen $\sqcap$ und $\sqcup$ zu vertauschen und die Ordnung umzukehren. Die Dualität der beiden Begriffe bringt es mit sich, dass es genügt, eine Aussage für Ideale bzw. Filter zu beweisen, woraufhin sofort die duale Aussage für Filter bzw. Ideale folgt. Wir werden in Zukunft die Dualität von Idealen und Filtern benutzen und sie als austauschbare Strukturen behandeln.

Die *Verbandsfilter* sind in Wahrheit meist nichts anderes als die Filter, die wir bereits kennen; wenn wir Potenzmengenverbände betrachten, erhalten wir direkt die Definition von Filtern aus 2.5.1.

[7] Wir zeigen kurz die Äquivalenz der Formulierung. Zuerst zeigen wir, dass die zweite Formulierung die erste impliziert. Seien $u \in I, v \in V$ gegeben und gelte $v \leq u$. Dann ist $v \sqcap u = v$ und damit ist auch $v \in I$. Nun zur Rückrichtung: Gelte $v \leq u \implies v \in I$. Es ist $u \sqcap v \leq u$ und daher gilt auch $u \sqcap v \in I$.

Definition 4.2.16 (Filter, Primfilter, Ultrafilter)
Sei $(V, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband. Eine Teilmenge F von V heißt **Filter**, wenn folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in F \quad &: \quad u \sqcap v \in F, \\ \forall u \in F \ \forall v \in V \quad &: \quad u \leq v \implies v \in F. \end{aligned}$$

Wir nennen F einen **echten Filter**, wenn $\emptyset \subsetneq F \subsetneq V$ gilt.
Wenn F ein echter Filter ist, für den zusätzlich für alle $u, v \in V$ gilt:

$$u \sqcup v \in F \implies u \in F \vee v \in F,$$

so heißt F **Primfilter**. Wenn V komplementär und F ein echter Filter ist, für den für alle $u \in V$ gilt:

$$\text{entweder } u \in F \text{ oder } u' \in F,$$

so heißt F **maximaler Filter** oder **Ultrafilter**.

Lemma 4.2.17 (Äquivalenz Primfilter/Ultrafilter (Primideal/maximales Ideal))
In einer booleschen Algebra ist jeder Primfilter (Primideal) zugleich Ultrafilter (maximales Ideal) und umgekehrt.

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage für Filter; die Aussage für Ideale folgt sofort aus der Dualität Ideal/Filter. Sei $(B, \sqcup, \sqcap)$ eine boolesche Algebra und F ein Filter von B. Sei F ein Primfilter. Da F ein echter Filter ist, gibt es ein $x \in F$ und wegen $x \leq 1$ ist auch $1 \in F$. Wir haben $u \sqcup u' = 1 \in F$, daher gilt $u \in F \vee u' \in F$. Wären beide Elemente in F, hätten wir $u \sqcap u' = 0 \in F$, ein Widerspruch zu $F \neq B$. Also ist F ein Ultrafilter.

Sei nun F ein Ultrafilter und gelte $u \sqcup v \in F$. Wäre nicht $u \in F$ oder $v \in F$ erfüllt, hätten wir $u' \in F$ und $v' \in F$. Es ist $F \ni (u \sqcup v) \sqcap u' = (u \sqcap u') \sqcup (v \sqcap u') = v \sqcap u'$, ebenso ist $v' \sqcap u \in F$. Damit ist auch $v \sqcap u' \sqcap v' \sqcap u = (v \sqcap v') \sqcap (u \sqcap u') = 0 \in F$, ein Widerspruch zu $F \neq B$. Also ist F ein Primfilter. □

Der nächste Satz ist stellt eine Verallgemeinerung von $\mathcal{UF}$ dar, wenn wir uns überlegen, dass Mengenfilter eine Teilmenge eines Potenzmengenverbands sind. Wir beweisen diesen Satz am Ende dieses Abschnitts.

Satz 4.2.18 (Ultrafilterlemma für Verbände)
Sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband und $F \subseteq V$ ein Filter von V. Dann gibt es einen maximalen Filter U so, dass $F \subseteq U \subset V$ gilt. Wir kürzen diese Aussage auch mit $\mathcal{UF}_V$ ab.

Mit Hilfe der folgenden Sätze zeigen wir am Ende dieses Abschnitts die Äquivalenz zwischen $\mathcal{UF}$ (der „klassischen" Version in 2.5.6) und $\mathcal{BPI}$, wobei wir auf den Satz von Tychonoff für Hausdorffräume zurückgreifen werden, der lediglich $\mathcal{UF}$ zum Beweis benötigt, wie wir in Bemerkung 2.5.22 erläutert haben.

Definition 4.2.19 (Verbandshomomorphismus)
Seien $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$, $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$ Verbände und sei $h : V \to W$ eine Abbildung. Dann heißt h **Verbandshomomorphismus**, falls für alle $a, b \in V$ gilt:

$$h(a \sqcup_V b) = h(a) \sqcup_W h(b), \quad h(a \sqcap_V b) = h(a) \sqcap_W h(b).$$

Falls zusätzlich V und W boolesche Verbände sind, so heißt h **boolescher Homomorphismus**, falls für alle $a \in V$ gilt[8]:

$$h(0_V) = 0_W, \quad h(1_V) = 1_W.$$

Beispiel 4.2.20 Für jeden endlichen booleschen Verband B gibt es einen booleschen Homomorphismus $h : B \to 2 = \{0, 1\}$.

[8] Daraus folgt sofort $h(a') = h(a)'$

Beweis. Da B endlich ist, gibt es ein $a \in B\backslash\{0\}$, für das gilt:

$$\forall b \in B\backslash\{0\} : b \leq a \implies b = a.$$

Ein solches Element nennen wir *atomar*. Wir definieren nun $h : B \to 2$, indem wir setzen:

$$h(b) = 1 \ :\overset{Def.}{\iff} \ a \leq b.$$

Wir prüfen nach, dass es sich um einen booleschen Homomorphismus handelt. Seien $x, y \in B$. Wir überprüfen zuerst, ob $\sqcup$ und $\sqcap$ korrekt abgebildet werden und unterscheiden dafür die Fälle:

Fall 1: $a \leq x, a \leq y$: Dann haben wir $a \leq x \sqcup y$ und $a \leq x \sqcap y$ und es gilt $h(x) = h(y) = 1$ und damit $1 = h(x \sqcap y) = h(x \sqcup y) = h(x) \sqcup h(y) = h(x) \sqcap h(y)$.

Fall 2: $a \leq x$ und $a \not\leq y$: Wir haben $h(x) = 1$ und $h(y) = 0$. Es ist $a \leq x \leq x \sqcup y$ und damit $1 = h(x \sqcup y) = h(x) \sqcup h(y)$. Wegen[9] $a \not\leq y$ ist $a \neq a \sqcap y \leq a$ und da a atomar ist, muss $a \sqcap y = 0$ gelten. Wegen $a \not\leq x \sqcap y \iff a \neq a \sqcap (x \sqcap y) = (a \sqcap y) \sqcap x = 0 \sqcap x = 0$ haben wir $h(x) \sqcap h(y) = 0 = h(x \sqcap y)$ gezeigt.

Fall 3: $a \not\leq x, a \not\leq y$: $h(x) = h(y) = 0$ und es ist $a \neq a \sqcap y \leq a$, also $a \sqcap y = 0$, weshalb wieder wegen $a \not\leq x \sqcap y \iff a \neq a \sqcap (x \sqcap y) = (a \sqcap y) \sqcap x = 0 \sqcap x = 0$ die Gleichung $h(x \sqcap y) = h(x) \sqcap h(y)$ folgt. Wäre $a \leq x \sqcup y$, würde $a \leq a \sqcap (x \sqcup y) = (a \sqcap x) \sqcup (a \sqcap y) = 0 \sqcup 0 = 0$ gelten, im Widerspruch zu $a \in B\backslash\{0\}$. Daher gilt auch in diesem Fall $0 = h(x \sqcup y) = h(x) \sqcup h(y)$.

Zum Abschluss stellen wir fest: Wegen $0 \leq a$ und $a \leq 1$ folgt $h(0) = 0$ und $h(1) = 1$. □

Definition 4.2.21 (endliche Durchschnittseigenschaft)
Sei (X, τ) ein topologischer Raum und bezeichne $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen. Wir sagen (K_i) erfülle die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$:

$$\bigcap_{i \in E} K_i \neq \emptyset.$$

Die folgende Definition gehört zum Kanon der klassischen Charakterisierungen der Kompaktheit.

Lemma 4.2.22 Sei (X, τ) ein topologischer Raum und bezeichne mit $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ die abgeschlossenen Mengen von X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) X ist kompakt,

ii) Für jede Familie $(K_i)_{i \in I}$ von abgeschlossenen Mengen von X, die die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt, gilt:
$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

Beweis. Sei X kompakt. Angenommen, es ist $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Dann gibt es aufgrund der endlichen Überdeckungseigenschaft kompakter Räume ein $E \subseteq I$ mit $|E| < \infty$ so, dass

$$X = X\backslash \bigcap_{i \in I} K_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{X\backslash K_i}_{\text{offen}} \overset{(X \text{ kompakt})}{=} \bigcup_{i \in E} X\backslash K_i = X\backslash \bigcap_{i \in E} K_i$$

erfüllt ist, im Widerspruch zu $\bigcap_{i \in E} K_i \neq \emptyset$ und es folgt *ii*).

Sei nun *ii*) erfüllt und sei $(O_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen, für die es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Dann hat die Familie abgeschlossener Menge $(X\backslash O_i)_{i \in I}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, da für jede endliche Menge $E \subseteq I$ gilt:

$$\bigcap_{i \in E} X\backslash O_i = X\backslash \bigcup_{i \in E} O_i \neq \emptyset.$$

[9] Es sei daran erinnert, dass wie in der Formulierung von 4.2.4 gilt: $u \sqcap v = u \iff u \sqcup v = v$.

Also gilt

$$X \backslash \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} X \backslash O_i \neq \emptyset,$$

im Widerspruch zu der Annahme, dass $(O_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X darstellt. Also ist X kompakt. □

Nun haben wir alles beisammen, um eine nur scheinbar schwächere Version von $\mathcal{BPI}$ zu beweisen.

Satz 4.2.23 (spezieller boolescher Primidealsatz)
Jede boolesche Algebra enthält ein Primideal.

Beweis. Wir benutzen zum Beweis nur $\mathcal{ZF} + \mathcal{UF}$. Sei B eine boolesche Algebra. Wir weisen nach, dass es einen booleschen Homomorphismus $h : B \to 2 = \{0, 1\}$ gibt, und dass $h^{-1}(0)$ ein Primideal ist. Wir fassen 2 als boolesche Algebra auf, mit der Halbordnung $0 \leq 1$. Wenn es einen solchen Homomorphismus gibt, betrachte $a, b \in h^{-1}(0)$. Dann ist

$$0 = 0 \sqcup 0 = h(a) \sqcup h(b) = h(a \sqcup b)$$

und damit ist auch $a \sqcup b \in h^{-1}(0)$. Sei $c \in B$ beliebig. Dann haben wir

$$0 = 0 \sqcap h(c) = h(a) \sqcap h(c) = h(a \sqcap c)$$

und es ist $a \sqcap c \in h^{-1}(0)$. Damit ist $h^{-1}(0)$ ein Ideal von B (beachte die äquivalente Idealdefinition in Bemerkung 4.2.15). Für $a \in B$ gilt entweder $h(a) = 0$ oder $h(a') = h(a)' = 0$. Damit ist $h^{-1}(0)$ ein maximales Ideal und mit Lemma 4.2.17 folgt, dass $h^{-1}(0)$ ein Primideal ist.

Es bleibt zu zeigen, dass es einen solchen Homomorphismus gibt. Wir betrachten die Menge aller Abbildungen $B \to 2$, kurz 2^B. Wir können 2 als topologischen Raum auffassen mit $\mathcal{P}(2) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ als Topologie. Dieser Raum ist hausdorffsch und kompakt. Mit dem Satz von Tychonoff für Hausdorffräume (siehe Satz 2.5.23) folgt nun unter Voraussetzung von $\mathcal{ZF} + \mathcal{UF}$, dass $2^B = \prod_{b \in B} 2$ mit der Produkttopologie ein kompakter Raum ist. Sei $T \subseteq B$ eine endliche Teilmenge. Definiere die Menge der Abbildungen, die eingeschränkt auf den von T erzeugten booleschen Teilverband $\langle T \rangle$ boolesche Homomorphismen sind:

$$H_T := \{h \in 2^B \mid \forall a, b \in \langle T \rangle : h(a \sqcup b) = h(a) \sqcup h(b) \wedge h(a \sqcap b) = h(a) \sqcap h(b) \wedge h(a') = h(a)'\}.$$

Die Menge H_T ist abgeschlossen, wie wir jetzt zeigen. Sei $b \in B$ und bezeichne $\pi_b : 2^B \to 2$ die $b-$te kanonische Projektion. Wenn $a \in 2$ ist, ist $\pi_b^{-1}(a)$ der Definition nach offen und $2^B \backslash \pi_b^{-1}(a) = \pi_b^{-1}(2 \backslash a)$ abgeschlossen. Da T endlich ist, ist auch $\langle T \rangle$ endlich. Sei $f \in 2^{\langle T \rangle}$. Da der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen bleibt, ist

$$\bigcap_{t \in \langle T \rangle} \pi_t^{-1}(\{f_t\}) = \prod_{B \backslash \langle T \rangle} 2 \; \dot{\times} \underbrace{\prod_{t \in \langle T \rangle} \{f_t\}}_{=\{g : \langle T \rangle \to 2 \mid \forall t \in \langle T \rangle : g(t) = f_t\} = \{f\}} = 2^{B \backslash \langle T \rangle} \; \dot{\times} \; \{f\}$$

auch abgeschlossen[10]. Da $2^{\langle T \rangle}$ endlich ist, gilt für jede Teilmenge $F \subseteq 2^{\langle T \rangle}$:

$$\bigcup_{f \in F} \bigcap_{t \in \langle T \rangle} \pi_t^{-1}(\{f_t\}) = \bigcup_{f \in F} \left(2^{B \backslash \langle T \rangle} \; \dot{\times} \; \{f\}\right)$$

ist abgeschlossen. Wenn wir nun jene endliche Teilmenge $\tilde{F} \subseteq 2^{\langle T \rangle}$ herausgreifen, deren Elemente genau die booleschen Homomorphismen auf $\langle T \rangle$ sind, haben wir

$$\bigcup_{f \in \tilde{F}} \bigcap_{t \in \langle T \rangle} \pi_t^{-1}(\{f_t\}) = H_T$$

[10] siehe Definition des Indexprodukts $\dot{\times}$ in 2.5.18.

und H_T ist abgeschlossen.

Wir weisen nach, dass $H_T \neq \emptyset$ gilt. Es genügt, ein $f \in 2^{\langle T \rangle}$ zu finden, das ein boolescher Homomorphismus ist und da $\langle T \rangle$ endlich ist, finden wir mit Beispiel 4.2.20 einen solchen Homomorphismus.

Wir zeigen zum Abschluss noch, dass die Menge $\{H_T \subseteq 2^B \mid T \subseteq I, |T| < \infty\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt. Seien $T_1, ..., T_n \subseteq I$ mit $|T_i| < \infty\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,n}$. Setze

$$\tau := \underbrace{\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} T_i}_{endlich}.$$

Es ist

$$\emptyset \neq H_\tau \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} H_{T_i}$$

und da 2^B kompakt ist, gibt es mit Lemma 4.2.22 ein

$$h \in \bigcap_{\substack{T \subseteq B \\ T \text{ endlich}}} H_T$$

was genau ein boolescher Homomorphismus $B \to 2$ ist. □

Satz 4.2.24 ($\mathcal{BPI}$)
Sei B eine boolesche Algebra und $I \subset B$ ein echtes Ideal. Dann ist I in einem Primideal enthalten. Wir werden am Ende dieses Abschnitts diesen Satz beweisen.

Wie schon in der Bemerkung 4.2.15 angeklungen, lassen sich boolesche Algebren auch als Ringe auffassen. Allerdings benötigen wir eine leicht andere Übersetzung, als es vereinfachend in 4.2.15 geschehen ist. Wir werden sehen, dass die Klasse der sogenannten booleschen Ringe, die wir gleich definieren werden, sogar isomorph zur Klasse der booleschen Algebren ist. Diesen Brückenschlag zur Ringtheorie wollen wir nun formal untermauern.

Definition 4.2.25 (boolesche Ringe)
Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ring. Dann heißt R **boolescher Ring**, falls jedes Element von R idempotent ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall x \in R : x^2 = x.$$

Lemma 4.2.26 (Eigenschaften boolescher Ringe)
Sei $(R, +\cdot, 0, 1)$ ein boolescher Ring. Dann gilt $\forall x, y \in R$:

1. $x = -x$,
2. $xy = yx$.

Beweis. Seien $x, y \in R$. Dann gilt wegen der Idempotenz $(x + x)^2 = x + x$,

$$4x = x^2 + 2x + x^2 = (x + x)^2 = x + x = 2x$$

und daher

$$2x = x + x = 0 \implies x = -x.$$

Es ist $(x + y)^2 = (x + y)$ und wir haben

$$x + xy + yx + y = x^2 + xy + yx + y^2 = (x + y)^2 = x + y$$

und es folgt

$$xy + yx = 0 \implies xy = -yx \overset{(1.)}{=} yx,$$

womit alles gezeigt ist. □

Satz 4.2.27 (Zusammenhang boolesche Ringe/boolesche Algebren)
Sei $(B, \sqcup, \sqcap)$ eine boolesche Algebra. Dann erhalten wir einen booleschen Ring, indem wir für alle $x, y \in B$ definieren:

$$xy := x \sqcap y, \quad x + y := (x \sqcap y') \sqcup (x' \sqcap y), \quad -x := x.$$

Sei umgekehrt $(R, +, \cdot)$ ein boolescher Ring. Dann erhalten wir eine boolesche Algebra, indem wir für alle $a, b \in R$ setzen:

$$a \sqcup b := a + b + ab, \quad a \sqcap b := ab, \quad a' := 1 + a.$$

Beweis. Sei alles wie oben. Wir weisen zuerst nach, dass B als boolescher Ring aufgefasst werden kann. Die Abgeschlossenheit der Ringoperationen folgt sofort aus der Abgeschlossenheit der Verbandsoperationen. Da $(B, \sqcap)$ ein kommutatives Monoid bildet, bleibt neben der Idempotenz nur noch die Gruppeneigenschaft von $(B, +)$ und ein Distributivgesetz zu zeigen. Beachte bei den folgenden Rechnungen, dass $(x \sqcup y)' = (x' \sqcap y')$ gilt.

1. Idempotenz: $\forall x \in B : x^2 = x \sqcap x = x$.

2. Distributivität: Seien $x, y, z \in B$. Es gilt

$$\begin{aligned} x(y+z) &= x \sqcap ((y \sqcap z') \sqcup (y' \sqcap z)) = (x \sqcap y \sqcap z') \sqcup (x \sqcap y' \sqcap z) \\ &\overset{(0 \sqcap y = 0)}{=} (x \sqcap x' \sqcap y) \sqcup (x \sqcap x' \sqcap z) \sqcup (x \sqcap y \sqcap z') \sqcup (x \sqcap y' \sqcap z) \\ &= ((x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup z')) \sqcup ((x \sqcap z) \sqcap (x' \sqcup y')) \\ &= ((x \sqcap y) \sqcap (x \sqcap z)') \sqcup ((x \sqcap y) \sqcap (x \sqcap z)') \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

3. Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} x + (y+z) &= (x \sqcap ((y \sqcap z') \sqcup (y' \sqcap z))') \sqcup (x' \sqcap ((y \sqcap z') \sqcup (y' \sqcap z))) \\ &= (x \sqcap ((y' \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z'))) \sqcup (x' \sqcap y \sqcap z') \sqcup (x' \sqcap y' \sqcap z) \\ &= (x \sqcap y' \sqcap z') \sqcup (x \sqcap z \sqcap y) \sqcup (x' \sqcap y \sqcap z') \sqcup (x' \sqcap y' \sqcap z). \end{aligned}$$

   Es gilt also auch

$$(x+y) + z = z + (y+x) = (z \sqcap y' \sqcap x') \sqcup (z \sqcap x \sqcap y) \sqcup (z' \sqcap y \sqcap x') \sqcup (z' \sqcap y' \sqcap x)$$

   und beide Ausdrücke stimmen überein, woraus $x + (y+z) = (x+y) + z$ folgt.

4. Neutrales Element: Wegen

$$(x+0) = (x' \sqcap 0) \sqcup (x \sqcap 0') = 0 \sqcup (x \sqcap 1) = x$$

   ist 0 auch das Nullelement der Addition von $(B, +)$.

5. Inverse Elemente: Wir haben

$$x + x = (x' \sqcap x) \sqcup (x \sqcap x') = 0$$

   ist jedes Element zu sich selbst invers.

Damit ist gezeigt, dass $(B, +, \cdot)$ ein boolescher Ring ist.

Wir weisen nun nach, dass $(R, \sqcup, \sqcap)$ eine boolesche Algebra ist. Seien $a, b, c \in R$.

1. Kommutativgesetze folgen sofort aus der Kommutativität von $(R, +)$ und $(R, \cdot)$, da R ein boolescher Ring ist.

2. Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} a \sqcap (b \sqcap c) &= a(bc) = (ab)c = (a \sqcap b) \sqcap c \\ a \sqcup (b \sqcup c) &= a \sqcup (b + c + bc) = (a + b + c + bc + a(b + c + bc)) \\ &= (a + b + c + bc + ab + ac + abc) = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= (a \sqcup b) \sqcup c. \end{aligned}$$

3. Absorptionsgesetze:

$$\begin{aligned} a \sqcap (a \sqcup b) &= a(a + b + ab) = a^2 + ab + ab = a + ab - ab = a, \\ a \sqcup (a \sqcap b) &= a + ab + aab = a + ab + ab = a. \end{aligned}$$

4. Distributivgesetze: Es genügt eines der beiden Gesetze zu zeigen, das zweite kann dann leicht daraus gefolgert werden.

$$\begin{aligned} a \sqcap (b \sqcup c) &= a(b + c + bc) = ab + ac + abc = ab + ac + a^2bc \\ &= ab + ac + abac = (ab) \sqcup (ac) \\ &= (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c). \end{aligned}$$

5. Existenz von (Verbands-)Null- und Einselement: Bezeichne mit 0 und 1 das Null- bzw. Einselement des Ringes. Dann gilt für jedes $a \in R$:

$$a \sqcap 0 = a0 = 0 \text{ und } a \sqcap 1 = a1 = a$$

woraus $0 \leq a \leq 1$ folgt.

6. Existenz von Komplementen: Wir haben mit $a' = a + 1$:

$$\begin{aligned} a \sqcap a' &= a(a + 1) = a^2 + a = a + a = 0, \\ a \sqcup a' &= a + (a + 1) + (a(a + 1)) = (a + a) + 1 + a^2 + a = 1 + (a + a) = 1. \end{aligned}$$

Damit sind alle Eigenschaften gezeigt. □

Bemerkung 4.2.28 Man kann sogar nachweisen, dass die Klasse der booleschen Ringe isomorph zu der Klasse der booleschen Algebren ist. Auf den einfachen, aber länglichen Nachweis wollen wir an dieser Stelle verzichten und verweisen stattdessen auf die Literatur, z.B. [Sch97], S. 335.

Lemma 4.2.29 Sei $(R, +, \cdot)$ ein boolescher Ring und $(B, \sqcup, \sqcap)$ die zu ihm isomorphe boolesche Algebra (mit gleicher Trägermenge, die hier nur aus Übersichtlichkeit mal R, mal B genannt wird). Dann gilt:

1. Es ist $I \subseteq R$ genau dann ein Ideal von R, wenn I ein Ideal von B ist.
2. Es ist $I \subseteq R$ genau dann ein Primideal von R, wenn I ein Primideal von B ist.
3. Der Quotientenring ${}^{R}/_{I}$ ist wieder ein boolescher Ring. Somit können wir insbesondere auch Quotienten ${}^{B}/_{I}$ von booleschen Algebren betrachten.

Beweis. 1. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann ist $(I, +)$ eine Gruppe und $\forall x \in I,\ y \in R : xy \in I$. Um nachzuweisen, dass I ein Ideal von B ist, genügt es zu zeigen, dass gilt:

$$\forall x, y \in I : x \sqcup y \in I \text{ und } \forall x \in I, z \in B : x \sqcap z \in I.$$

Wir haben $x \sqcup y = x + y + xy \in I$, da $xy \in I$ und I abgeschlossen bezüglich $+$ ist. Weiterhin haben wir $x \sqcap z = xz \in I$. Damit ist I ein Ideal von B. Sei umgekehrt I ein Ideal von B und seien $x, y \in I$. Dann ist $x + y = \underbrace{(x \sqcap y')}_{\in I} \sqcup \underbrace{(x' \sqcap y)}_{\in I} \in I$. Sei $z \in R$ beliebig. Dann ist $xz = x \sqcap z \in I$ und wir haben 1. gezeigt.

2. Sei I ein Primideal von R. Dann gilt $xy \in I \implies x \in I \vee y \in I$. Da I auch ein echtes Ideal ist, folgt sofort, dass I auch ein Primideal von B ist. Die Umkehrung folgt analog.

3. Wir weisen die Idempotenz nach. Sei $[x]_I \in {}^{R}/_{I}$ gegeben. Dann ist

$$[x]_I[x]_I = [x^2]_I \overset{\substack{\text{(Idempot.}\\ \text{von R)}}}{=} [x]_I.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Wir kommen nun zum Kern dieses Abschnitts und zeigen die Äquivalenz zwischen den verschiedenen Formen von $\mathcal{BPI}$ und $\mathcal{UF}$. Es gibt noch viele weitere bekannte Sätze, die ebenfalls äquivalent zu $\mathcal{BPI}$ sind, darunter der Stonesche Darstellungssatz (jeder boolesche Verband ist isomorph zu einem Teilverband eines Potenzmengenverbandes) und der Kompaktheitssatz (der wichtigste Satz der Prädikatenlogik erster Stufe: eine Formelmenge ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von ihr erfüllbar ist), siehe dazu [Sch97], S.159).

Satz 4.2.30 (Äquivalenzen zu $\mathcal{UF}$)
Folgende Aussagen sind äquivalent in $\mathcal{ZF}$:

i) $\mathcal{UF}$,

ii) boolescher Primidealsatz (spezielle Variante)[11],

iii) $\mathcal{BPI}$,

iv) $\mathcal{UF}_V$.

Beweis. *i)* $\implies$ *ii)*: folgt sofort aus Satz 4.2.23.
ii) $\implies$ *iii)* : Betrachte ${}^{B}/_{I}$. Dies ist, wie in Lemma 4.2.29 festgestellt, eine boolesche Algebra. Die Aussage *ii)* liefert uns ein Primideal $M \subset {}^{B}/_{I}$. Nun können wir die Projektionsabbildung $\pi : B \to {}^{B}/_{I}$ betrachten. Die Menge $\pi^{-1}(M)$ ist ein Primideal in B (das offensichtlich I enthält, da jedes Ideal die 0 enthält und somit $I \in M$ gilt), wie wir jetzt zeigen. Da M echt ist, ist auch $\pi^{-1}(M)$ echt. Wir fassen B jetzt gleichzeitig als booleschen Ring auf. Seien $x, y \in B = R$ mit $xy \in \pi^{-1}(M)$. Dann ist $[xy]_I = [x]_I[y]_I \in M$ und somit, da M prim ist, auch $[x]_I \in M$ oder $[y]_I \in M$. Damit ist auch $x \in \pi^{-1}(M)$ oder $y \in \pi^{-1}(M)$ und wir haben *iii)* nachgewiesen.
iii) $\implies$ *iv)*: Folgt sofort aus der Dualität von Primidealen und Ultrafiltern, siehe 4.2.15.
iv) $\implies$ *i)*: Sei M eine Menge und sei F ein Filter von M. Da $\mathcal{P}(M)$ ein Verband ist (der Potenzmengenverband), können wir das im Verbandssinne zu F duale Ideal I betrachten und finden mit Hilfe von $\mathcal{BPI}$ ein Primideal P, das I enthält. Dessen dualer Filter ist ein Ultrafilter, der F enthält und es folgt $\mathcal{UF}$. □

4.3 Einige Bemerkungen über logische Abhängigkeiten in Zusammenhang mit BPI, HB, UF und AC und ein Ausblick auf relative Konsistenzbeweise

In diesem letzten Abschnitt gehen wir auf einige logische Fragestellungen ein, die sich zwangsläufig aus der Beschäftigung mit $\mathcal{AC}$ und dessen abgeschwächten Formen, ergeben. Wir stellen dazu einige Ergebnisse der neueren Forschung dar und befassen uns am Ende noch mit der Frage, was logische Unabhängigkeit bedeutet und wie relative Konsistenzbeweise im Prinzip funktionieren. Als Grundlage dazu dient hauptsächlich Eric Schechters Buch[12] und eine Vorlesung zur klassischen Logik, gehalten von Dr. habil. Peter Steinacker im Jahr 2012.

[11] Siehe 4.2.23.
[12] Siehe [Sch97].

Satz 4.3.1 ($\mathcal{UF}$ ist echt stärker als $\mathcal{HB}$)
Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen $\mathcal{BPI}, \mathcal{HB}, \mathcal{UF}$ und $\mathcal{AC}$:

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{AC} \implies \mathcal{ZF} + \mathcal{UF} \implies \mathcal{ZF} + \mathcal{HB}$$

und

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{AC} \not\Leftarrow \mathcal{ZF} + \mathcal{UF} \not\Leftarrow \mathcal{ZF} + \mathcal{HB}.$$

Die obere Zeile dieses Satzes haben wir in dieser Diplomarbeit an verschiedenen Stellen bewiesen, siehe 2.5.6 und 4.1.6. Die untere Implikationskette erfordert wesentlich mehr Arbeit, daher verweisen wir auf David Pincus, der 1972 gezeigt hat, dass $\mathcal{HB}$ in $\mathcal{ZF}$ echt schwächer ist als $\mathcal{UF}$[13] und Thomas Jech, für den Nachweis, dass das Ultrafilterlemma echt schwächer als $\mathcal{AC}$ ist[14].

Wir wollen nun kurz auf ein paar logische Details eingehen und erklären, wie eine Aussage der Form $\mathcal{ZF} + \mathcal{UF} \not\Rightarrow \mathcal{ZF} + \mathcal{AC}$ prinzipiell bewiesen werden kann.

Bemerkung 4.3.2 Statt eine rigorose formale Einführung in die Sprache der Logik zu geben, wollen wir uns mit Beispielen und Intuition behelfen, um zuerst einmal den Konsistenzbegriff zu verstehen. Eine **Formel** ist eine endliche Zeichenkette, die aus Quantoren, Klammern, Variablen, Funktionen zwischen Variablen, Prädikaten und logischen Symbolen besteht und der man im Idealfalle einen *Sinn* zuordnen kann[15]. Um ein Beispiel für eine Formel zu geben, schauen wir uns die folgende an:

$$\exists L\ \forall X : X \notin L.$$

Diese Formel ist genau dann wahr, wenn das zugrundeliegende (Objekt-)Universum eine leere Menge enthält. Implizit setzt diese Formel voraus, dass das Prädikat „$\in$“ in diesem Universum erklärt sein muss. Eine Formel F nennen wir **erfüllbar**, wenn es eine derartige Menge (oder Klasse) I von Objekten so gibt, dass F in I *interpretiert* werden kann und die Formel F dabei wahr ist. Eine solche Menge (oder Klasse) von Objekten, zusammen mit einer Interpretation, wie die Formeln auf die Klasse angewendet werden sollen, wird auch **Modell** genannt.

Eine *Menge* Σ von Formeln heißt **erfüllbar**, wenn es ein Modell I so gibt, dass jede Formel in Σ durch das Modell erfüllt wird. Sei F eine beliebige Formel. Wenn jedes Modell, das Σ erfüllt, auch F erfüllt, dann sagen wir, dass F aus Σ **semantisch folgt** und schreiben auch

$$\Sigma \models F.$$

Wir sagen eine Formel F ist aus Σ **syntaktisch ableitbar**, wenn mit einem Kalkül[16] unter Annahme der Formeln von Σ die Formel F erzeugt werden kann. Wir schreiben dann auch[17]:

$$\Sigma \vdash F.$$

Der Unterschied der beiden Begriffe liegt darin, dass wir beim „Modellieren“ semantisch, also inhaltlich und interpretatorisch vorgehen, und beim Ableiten lediglich die Regeln eines Kalküls befolgen und uns auf einer rein syntaktischen, d.h. formalen Ebene bewegen. Wenn für alle Formeln F eines Systems, die gebildet werden können, gilt:

$$\Sigma \models F \iff \Sigma \vdash F,$$

so sagen wir, das Ableitungskalkül ist **adäquat**. In einem solchen Fall ist es nicht von Belang, ob man eine Formel semantisch oder syntaktisch aus Σ „erhält“. Üblicherweise geht man (mehr oder weniger streng) syntaktisch vor, aber um einige tiefgehende Resultate zu erhalten, ist es manchmal

[13] Siehe [Pin72].

[14] Siehe [Jec73], S. 97.

[15] Ein Prädikat ist eine Abbildung von Mengen auf Wahrheitswerte, wie z.B. $P(x,y) := x < y$ eines ist.

[16] Ein Kalkül ist eine „Rechenvorschrift“, die erklärt, was logisch korrekte Schlüsse sind. Beispielweise fällt darunter auch die logische Regel des indirekten Beweises oder des Beweises durch Induktion.

[17] Wir verwenden diese Symbolik anstelle von $\Sigma \implies F$, was zwar im Prinzip dasselbe meint, aber aus Sicht eines Logikers mit zu vielen unklaren Bedeutungen aufgeladen ist. Im Prinzip müsste man auch noch sagen, um welches Kalkül es sich genau handelt, wenn man $\vdash$ benutzt. Es gibt viele äquivalente Kalküle und Kalkülformen für die Prädikatenlogik erster Stufe, darunter das *Hilbertkalkül*, *Sequenzenkalkül*, *Tableaukalkül* und das *System des natürlichen Schließens*, um nur einige zu nennen.

vonnöten, den semantischen Weg zu beschreiten. Kurt Gödel hat mit seinem Vollständigkeitssatz (der interessanterweise äquivalent zu $\mathcal{UF}$ ist) bewiesen, dass der „üblicherweise" von Mathematikern verwendete Kalkül der Prädikatenlogik erster Stufe (der z.B. die Regel „Modus Ponens" enthält[18]) adäquat ist.

Wir nennen die Formelmenge Σ **inkonsistent**, wenn es möglich ist, eine Formel F und ihre Negation $\neg F$ aus Σ abzuleiten (es gilt also $\Sigma \vdash F \wedge \neg F$). In diesem Fall können wir wegen

$$F \wedge \neg F \vdash G$$

jede beliebige Formel G („aus Falschem folgt Beliebiges[19]") aus Σ ableiten.

Wir nennen eine Formelmenge **konsistent**, wenn sie nicht inkonsistent ist. Wenn eine Formelmenge ein Modell besitzt, ist sie automatisch konsistent. Wir bezeichnen mit

$$Con(\Sigma) := \text{„Die Formelmenge } \Sigma \text{ ist konsistent“}.$$

Das Axiomensystem nach Zermelo-Fraenkel $\mathcal{ZF}$ stellt eine Formelmenge dar, und wir können uns nun fragen, ob $Con(\mathcal{ZF})$ gilt. David Hilbert verfolgte mit seinem formalistischen Ansatz das Ziel, die Widerspruchsfreiheit (also die Konsistenz) von $\mathcal{ZF}$ aus $\mathcal{ZF}$ selbst oder einem einfacheren System heraus zu beweisen. Kurt Gödel hat jedoch 1931 nachgewiesen, dass jedes hinreichend starke formale System, das in der Lage ist die Arithmetik zu beschreiben (wie $\mathcal{ZF}$ eines ist), seine eigene Konsistenz nicht beweisen kann:

$$\mathcal{ZF} \nvdash Con(\mathcal{ZF}).$$

Eric Schechter meint dazu:

> This should not be entirely surprising. On a more fundamental level, we cannot use the basic techniques of reasoning to prove that the basic techniques of reasoning are reliable. Such circular reasoning would be worthless. Perhaps we are all really quite mad and merely imagine ourselves to be rational. Even a mathematician must accept certain some things on faith or learn to live with uncertainty.
>
> [Sch97, S. 400]

Aufgrund der prinzipiellen Unmöglichkeit aus dem System selbst heraus die Widerspruchsfreiheit desselben Systems zu beweisen, beschränkt man sich seitdem in der Forschung darauf, unter der Annahme der Konsistenz[20] von $\mathcal{ZF}$ sogenannte **Unabhängigkeits-** und **relative Konsistenzbeweise** zu führen. Zu einer gegebenen Formelmenge Σ (z.B. $\mathcal{ZF}$) und einer im Fokus stehenden Formel F (z.B. $\mathcal{AC}$) fragt man sich hierbei, ob F oder $\neg F$ aus Σ ableitbar ist. Unter Voraussetzung der Adäquatheit des Kalküls ist dies äquivalent zu der Frage, ob

$$\Sigma \models F \text{ oder } \Sigma \models \neg F$$

gilt. Wenn es nun gelingt zwei Modelle von Σ zu finden, wobei das eine Modell F erfüllt und das andere $\neg F$ erfüllt, ist klar, dass niemals $\Sigma \models F$ oder $\Sigma \models \neg F$ gelten kann und aufgrund der Adäquatheit sich auch kein Beweis für F im Kalkül finden lässt, es also gilt

$$\Sigma \nvdash F \text{ und } \Sigma \nvdash \neg F.$$

Die eben skizzierte Vorgehensweise zeichnet einen sogenannten Unabhängigkeitsbeweis aus und wir sagen dann, dass F *logisch unabhängig* von Σ ist. Unter der Annahme der Konsistenz von Σ wissen wir dann auch, dass sowohl $\Sigma \cup \{F\}$ als auch $\Sigma \cup \{\neg F\}$ konsistent sind, was man als relative Konsistenz zwischen $\Sigma, \Sigma \cup \{F\}$ und $\Sigma \cup \{\neg F\}$ relativ zu Σ bezeichnet; man spricht bei solchen zueinander relativ konsistenten Systemen auch von **Äquikonsistenz**. Am Beispiel des Auswahlaxioms wurde von Kurt

[18] Darunter versteht man im Kern folgendes Schema: „Wenn a gegeben ist und außerdem b aus a folgt, so gilt b".

[19] Auch bekannt unter „Ex falso sequitur quodlibet".

[20] Manche sprechen auch von *empirischer Konsistenz*, da seit nahezu 100 Jahren an $\mathcal{ZFC}$ geforscht wird, ohne auf einen Widerspruch gestoßen zu sein

Gödel mit Hilfe von geschickt konstruierten Modellen gezeigt:

$$\mathcal{ZF} + Con(\mathcal{ZF}) \not\models \neg\mathcal{AC}$$

womit er die Unbeweisbarkeit von $\neg\mathcal{AC}$ aus $\mathcal{ZF}$ heraus gezeigt hat (immer vorausgesetzt, dass $\mathcal{ZF}$ konsistent ist), was die Aussage

$$\mathcal{ZF} + Con(\mathcal{ZF}) \models Con(\mathcal{ZF} + \mathcal{AC})$$

impliziert. P. Cohen zeigte später mit seiner neuentwickelten Methode namens Forcing auch mit Modellen, dass

$$\mathcal{ZF} + Con(\mathcal{ZF}) \models Con(\mathcal{ZF} + \neg\mathcal{AC})$$

gilt. Diese beiden relativen Konsistenzbeweise ergeben gepaart einen Unabhängigkeitsbeweis. Tatsächlich ist damit gezeigt, dass $\mathcal{AC}$ logisch unabhängig von $\mathcal{ZF}$ ist, also bedenkenlos zu $\mathcal{ZF}$ hinzugenommen werden kann. Selbst wenn $Con(\mathcal{ZF})$ *falsch* sein sollte: bei einem ohnehin inkonsistenten System kann man nicht mehr viel kaputt machen, indem man ein weiteres (möglicherweise auch widersprüchliches) Axiom hinzufügt. Es gibt von der logischen Seite her also keinen Grund, auf $\mathcal{AC}$ zu verzichten und stattdessen nur mit $\mathcal{ZF}$ Mathematik zu treiben, denn entweder ist $\mathcal{ZF}$ bereits inkonsistent oder $\mathcal{ZFC}$ ist konsistent. Also sind $\mathcal{ZF}$, $\mathcal{ZF} + \mathcal{AC}$ und $\mathcal{ZF} + \neg\mathcal{AC}$ äquikonsistent relativ zu $\mathcal{ZF}$. Es gibt viele weitere zu $\mathcal{ZF}$ äquikonsistente Systeme, z.B.

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{DC} + \mathcal{HB} + \text{„Jeder Ultrafilter ist fixiert"}$$

um nur eines zu nennen[21]. Um nun die Aussage

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{HB} \nvdash \mathcal{ZF} + \mathcal{UF}$$

zu beweisen, genügt es sich ein Modell von $\mathcal{ZF} + \mathcal{HB}$ zu „basteln“ (unter der Annahme, dass es überhaupt ein Modell von $\mathcal{ZF} + \mathcal{HB}$ gibt, was bedeutet, dass $\mathcal{ZF} + \mathcal{HB}$ konsistent ist), das $\neg\mathcal{UF}$ erfüllt, was nichts anderes als $\mathcal{ZF} + \mathcal{HB} \not\models \mathcal{UF}$ bedeutet. Damit wäre aufgrund der Adäquatheit auch

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{HB} + Con(\mathcal{ZF} + \mathcal{HB}) \nvdash \mathcal{UF}$$

gezeigt.

Wie bereits im Kapitel über das Banach-Tarski Paradoxon angeklungen ist, gibt es beim Beweis desselben die Möglichkeit, auf die Anwendung von $\mathcal{AC}$ zu verzichten, wenn stattdessen auf $\mathcal{HB}$ zurückgegriffen werden kann. Da Banach-Tarski aber die Existenz nicht-lebesgue-meßbarer Mengen impliziert, haben wir sogleich

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{HB} + Con(\mathcal{ZF} + \mathcal{HB}) \vdash \neg\mathcal{LM}$$

wie Pawlikowski in [Paw91] gezeigt hat. Dabei ist es interessant anzumerken, dass es (unter der Annahme der Existenz eines Modells für $\mathcal{ZF}$) für $\mathcal{ZF} + \mathcal{DC}$ ein Modell gibt, in dem jede Menge des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar ist, es also gilt: [22]:

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{DC} \not\models \neg\mathcal{LM}.$$

Damit ist klar, dass auch

$$\mathcal{ZF} + \mathcal{DC} \nvdash \mathcal{HB}$$

gilt. Für weiterführende Fragen bezüglich logischer Unabhängigkeit in Zusammenhang mit $\mathcal{AC}$ und seinen schwächeren Formen sei hier auf Thomas Jechs Standardwerk *The Axiom of Choice* verwiesen[23].

[21] $\mathcal{DC}$ bezeichnet das Axiom der abhängigen Auswahl wie in 1.2.3 definiert. Siehe auch [Sch97], S. 402.
[22] Siehe dazu [Jec73], S. 149
[23] Jec73.

Resümee

Im Jahre 1900 hat Hilbert in seiner berühmten Rede vor dem internationalen Mathematikerkongress seine 23 „Jahrhundertprobleme“ vorgestellt, darunter auch die Aufgabe, die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu beweisen. Das mündete in den 1920'er Jahren in dem sogenannten „Hilbertprogramm“; dem Versuch, ein Axiomensystem zu finden, das mächtig genug ist, dass sich die gesamte bekannte Mathematik aus ihm ableiten lässt (z.B. $\mathcal{ZFC}$ leistet das), und dessen Vollständigkeit[24] und Widerspruchsfreiheit sich beweisen lässt. Im letzten Punkt kam das Programm zum Stillstand mit dem Beweis des berühmten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes[25], und alle Hoffnung auf eine sozusagen reine, absolute Mathematik musste begraben werden. Gödel hatte gezeigt, dass es in jedem mit $\mathcal{ZFC}$ vergleichbaren System mindestens eine Aussage gibt, die weder bewiesen, noch widerlegt werden kann innerhalb dieses Systems. Ein prominentes Beispiel für eine solche Aussage ist das Auswahlaxiom selbst: Kurt Gödel (1940) und Paul Cohen (1963) haben gezeigt, dass das Auswahlaxiom in $\mathcal{ZF}$ weder beweis- noch widerlegbar ist, wie es Zermelo bereits vor den beiden in dem Eingangs zitierten Abschnitt richtig vermutete ([Zer07], S. 111-112). Daraus folgt, wie in Abschnitt 4.3 angedeutet wurde, dass $\mathcal{ZF}$ genau dann konsistent ist, wenn $\mathcal{ZFC}$ konsistent ist, genau dann wenn $\mathcal{ZF} + \neg\mathcal{AC}$ konsistent ist. Es bleibt also dem Mathematiker überlassen, das Auswahlaxiom zu seinen „Glaubensgrundsätzen“ hinzuzunehmen oder es abzulehnen, wie es Konstruktivisten, Intuitionisten und Finitisten machen. Vor diesem Hintergrund hat mathematische Wahrheit durchauß etwas individuelles.

Mittlerweile ist die Meinung vorherrschend, dass es keinen Sinn habe, von richtig oder falsch bei Axiomen zu sprechen, sondern nur von relativer Konsistenz von Systemen, also der Eigenschaft eines Axiomensystems, keine Widersprüche zu erzeugen. Es hat sich die Ansicht entwickelt, dass man unproblematische Axiome (also solche, die logisch unabhängig vom Rest des betrachteten Axiomensystems sind) lediglich nach ihrer *Nützlichkeit* beurteilen sollte. Eric Schechter sagt dazu:

> „In axiomatic set theory, one is not concerned with “true” or “false” (because ultimately these things are unknowable), but only with “implies”. With this viewpoint, AC is simply another axiom that we may accept or reject.“
>
> [Sch97, S.151]

Ich persönlich tendiere dazu, das Auswahlaxiom als nützlicher zu empfinden als dessen Negation - auch, weil ein Großteil der Mathematik bereits aus tiefen Resultaten besteht, die zum Teil nur mit Hilfe des Auswahlaxioms erzielt werden konnten. Man denke an die Nichtstandardanalysis, die ganz wesentlich von der Existenz nichtfixierter Ultrafilter abhängt.

Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, müssten wir beim Weglassen von $\mathcal{AC}$ auf so grundlegende Instrumente wie das Lemma von Zorn oder den Satz von Tychonoff verzichten, was nicht nur die Funktionalanalysis untergraben würde mit dem Fehlen des Satzes von Hahn-Banach (dessen Beweis das Lemma von Zorn benötigt) oder die Topologie, sondern sogar die lineare Algebra mit dem Fehlen des Theorems „Jeder Vektorraum hat eine Basis“[26], um nur einige wichtige Bereiche zu nennen. Andererseits wäre dann auch der Wohlordnungssatz nicht mehr gültig. Das wiederum dürfte einigen eher gefallen, da es schier unmöglich ist, sich eine Wohlordnung auf den reellen Zahlen vorzustellen - was natürlich

[24] Vollständigkeit bedeutet an dieser Stelle, dass jede Formel entweder bewiesen oder widerlegt werden kann von diesem System.

[25] Insbesondere die als Formel schreibbare Aussage $Con(\mathcal{ZFC})$ lässt sich weder beweisen noch widerlegen in $\mathcal{ZFC}$, siehe dazu 4.3.

[26] Dieses Theorem ist auch äquivalent zu $\mathcal{AC}$, siehe dazu: Blass, Andreas (1984). „Existence of bases implies the axiom of choice“. Contemporary mathematics 31.

kein echtes Argument dagegen ist. Man könnte anführen, dass die Vergleichbarkeit der Mächtigkeit von Mengen nur durch den Wohlordnungssatz garantiert werden kann, wie wir in 2.3.2 gesehen haben, was eine intuitiv eher korrekte Annahme ist. Andere in dieser Arbeit bewiesene Äquivalenzen lassen einen eher kalt, dazu gehören mit Sicherheit die technischen Äquivalenzen aus 2.1, aber auch der Satz von König oder die geometrische Charakterisierung aus 2.7, da diese Formulierungen von $\mathcal{AC}$ möglicherweise zu weit von der Anschaulichkeit anderer Charakterisierungen wie z.B. der graphentheoretischen in 2.6 oder dem Auswahlaxiom selbst in 1.1 entfernt sind. Hier zeigt sich auch schön die Ambivalenz der mathematischen Intuition: einerseits ist sie eine mächtige Hilfe in vielen Situationen, andererseits verleitet sie eben auch zu falschen Schlüssen, und widerspricht sich womöglich am Ende gar, wenn man bedenkt, dass alle Formulierungen des Auswahlaxioms, die unplausiblen und die plausiblen, denselben logischen Gehalt haben. Dieser merkwürdige und zugleich faszinierende Zusammenhang wird durch das Zitat Jerry Bonas zu Beginn des zweiten Kapitels prägnant auf den Punkt gebracht:

> „The Axiom of Choice is obviously true, the Well–ordering theorem is obviously false; and who can tell about Zorn's Lemma?"

[Sch97], S.153

Dass das „Paradoxon" von Banach-Tarski in 3.1 einen Mathematiker wirklich beunruhigen sollte, glaube ich eher nicht.

Erstens liegt diesem scheinbaren Widerspruch ein leicht zu erkennendes, simplifizierendes physikalisches Verständnis von Volumen zugrunde, das sich auf die Annahme stützt, dass wenn wir Würfeln und Kugeln Volumina zuordnen können, dies auch für sehr kompliziert geformte Objekte in jedem Fall möglich sein wird, und zweitens liefern uns die Borelmengen einen eleganten Ausweg aus der Misere, der im Prinzip alle diesbezüglichen Fragen der Maßtheorie so behandelbar macht, wie es vor der Entdeckung nichtmeßbarer Mengen der Fall war. Über die Tücken der Intuition habe ich mich in Hinblick auf 3.2, das „Rätsel", ja bereits geäußert; Felix Hausdorff meinte 1914 im Vorwort seines Hauptwerkes „Grundzüge der Mengenlehre" zu demselben Thema:

> „... aber in einem Gebiet, wo schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist, gibt es außer der lückenlosen Deduktion kaum ein Mittel, sich und den Leser vor Täuschungen zu bewahren."

Kommen wir nun zu einem echten Argument gegen die Benutzung des Auswahlaxioms. Es bleibt festzuhalten, dass wo immer $\mathcal{AC}$ notwendigerweise benutzt wird, ein konstruktiver Ansatz scheitern muss. Als Beispiel dafür kann man das Ultrafilterlemma in 2.5.6 nehmen, aber auch jede im zweiten Kapitel bewiesene zu $\mathcal{AC}$ äquivalente Aussage ist natürlich ein Beispiel für eine inhärent nichtkonstruktive Aussage. Dies stellt tatsächlich eine besondere Qualität mathematischer Aussagen dar: Existenzaussagen, für die es keine Beispiele gibt. Sie verdienen meiner Meinung nach einen bewussteren Umgang als andere, konstruktive Aussagen, die sich mit Beispielen belegen lassen. Das prinzipielle Fehlen von Beispielen für freie Ultrafilter, die in vielen Bereichen intensiv genutzt werden, kann einem schon zu denken geben, oder wie Eric Schechter in [Sch97], S.137 sagt:

> To feed one's family, it is not enough to prove that a certain pond contains a fish; ultimately one must catch the fish.

Wenn man aus Konstruktibilitätsgründen das Auswahlaxiom ablehnt, muss man sich jedoch darüber im Klaren sein, dass auch die Abschwächungen $\mathcal{UF}$ und $\mathcal{HB}$ noch zuviel „Nichtkonstruktibilität" beinhalten, da mit beiden Banach-Tarski beweisbar ist, wie in 4.3 erläutert wurde. Darüber hinaus ist $\mathcal{AC}$ nicht die einzige Quelle von Nichtkonstruktibilität in $\mathcal{ZFC}$: auch das Fundierungsaxiom, das normalerweise nicht in Frage gestellt wird, hat nichtkonstruktible Entitäten zu Folge, siehe [Bee85] und [Sch97], S.138. So gesehen lohnt es sich auch nicht wirklich, einfach auf $\mathcal{AC}$ zu verzichten.

Die vielleicht produktivste Erkenntnis aus der Beschäftigung mit dem Auswahlaxiom ist meiner Ansicht nach folgende: es kann durchaus einen beweisstrategischen Vorteil bedeuten, sich über die nichtkonstruktible Natur von $\mathcal{AC}$ Gedanken zu machen: wenn man weiß, dass eine Aussage nicht konstruktiv bewiesen werden kann, verliert man auch nicht viel Zeit, dies zu versuchen.

Vielleicht wären ebenso tiefe Resultate mit $\mathcal{ZF} + \neg\mathcal{AC}$ möglich (teilweise auch schöne, wie $\mathcal{ZF} + \neg\mathcal{AC} \implies \mathcal{LM}$), aber von einem pragmatischen Standpunkt aus gesehen wird man die vielen auf dem

Auswahlaxiom aufbauenden Ergebnisse nicht ohne einen triftigeren Grund verwerfen wollen. Eventuell wäre die Mathematik ohne Auswahlaxiom auch ärmer, da die Negation einer Existenzaussage uns womöglich weniger Spielraum lässt als die Existenzaussage selbst. Die Benutzung des Auswahlaxioms bleibt nach aktuellem Kenntnisstand am Ende eine Geschmacks- und für manchen sogar eine Glaubensfrage. Vom logischen Standpunkt her macht es keinen Unterschied es zu $\mathcal{ZF}$ hinzuzunehmen, denn die Konsistenz von $\mathcal{ZF}$ muss man so oder so einfach „glauben“.

Index

Symbolverzeichnis

$\mathcal{AC}$	Auswahlaxiom	1.1.1.10
$\mathcal{CC}$	Abzählbares Auswahlaxiom, „Countable Choice“	1.2.1
$\mathcal{BPI}$	Boolescher Primidealsatz	4.2.24
$\mathcal{DC}$	Beschränktes Auswahlaxiom, „Dependent Choice“	1.2.3
$\mathcal{GCH}$	Allgemeine Kontinuumshypothese, „Generalized Continuum Hypothesis“	1.6.11
$\mathcal{HB}$	Hahn-Banach-Theorem	4.1
$\mathcal{LM}$	„Jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-Meßbar“	4
$\mathcal{NBG}$	Die Neumann-Bernays-Gödel Mengenlehre mit Klassen	1.3.10
$\mathcal{UF}$	Ultrafilterlemma	2.5.6
$\mathcal{UF}_V$	Ultrafilterlemma für Verbände	4.2.18
$\mathcal{ZF}$	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ohne Auswahlaxiom	1.1.1
$\mathcal{ZFC}$	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre inklusive Auswahlaxiom	1.1.1
$\mathcal{ZF} + \mathcal{AC}, \mathcal{ZF} + \mathcal{HB}, \mathcal{ZF} + ...$	Das Axiomensystem bestehend aus $\mathcal{ZF}$ ergänzt um $\mathcal{AC}$, respektive $\mathcal{HB}$, respektive ...	
$\mathfrak{Ord}$	Die Klasse der Ordinalzahlen	1.4.15
$\mathfrak{Kard}$	Die Klasse der Kardinalzahlen	1.6.1
$\wedge, \vee, \Longrightarrow, \neg$	logisches „Und“, „Oder“, „Implikation“, „Nicht“	
$A \; :\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \; B$	Definition; A ist die bezeichnete und B die bezeichnende Aussage	
$\bigcup A$	Die Vereinigung aller Elemente von A	1.1.1.4
$\mathcal{P}(A)$	Die Menge aller Teilmengen von A, die Potenzmenge	1.1.1.5
(A, B)	Ein 2-Tupel, definiert durch $\{A, \{A, B\}\}$	1.1.5
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	Das Cantorsche Mengenprodukt von A und B	1.1.5
$\operatorname{dom}(f)$	Der Definitionsbereich von f	1.1.8
$\operatorname{Im}(f)$	Das Bild von f	
$f : A \to B$	Eine Abbildung von A nach B	
$\lvert A\rvert$	Mächtigkeit der Menge A; falls $A \in \mathbb{R}$: Betrag von A	
$\lvert A\rvert = \lvert B\rvert$	Die Mengen A und B sind gleichmächtig	1.3.1
$\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$	B ist größergleichmächtig A	1.3.1
A^B	Die Menge aller Funktionen von B nach A	
$C(\mathbb{R})$	Die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	
ω	Die erste unendliche Ordinalzahl, entspricht $\mathbb{N}$	1.1.9
$\aleph_n$	Die n-te Kardinalzahl, sprich: „Aleph-n“	1.6.9
$\mathbb{N}$	Die natürlichen Zahlen nach John von Neumann	1.1.9
$\mathbb{N}_{n,m}$	Die Menge der natürlichen Zahlen von n bis m inklusive n und m	
$[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$	Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$	
0	Die kleinste Ordinalzahl, entspricht der leeren Menge; in der Verbandstheorie das Nullelement	1.1.9
1	Die Menge $\{\emptyset\} \in \omega$; in der Verbandstheorie das Einselement	1.1.9
2	Die Menge $\{\emptyset\{\emptyset\}\}$	1.1.9

V	Die Allklasse, die jede Menge enthält	1.3.8
$A \xRightarrow{\mathcal{AC}} B$	B folgt aus A unter Verwendung von $\mathcal{ZF} + \mathcal{AC}$	
M_α	Das von α erzeugte Anfangsstück für die Wohlordnung M	1.4.5
$M \simeq N$	Die Wohlordnungen M und N sind ordnungsisomorph	1.4.10
$\alpha, \beta, \gamma, \lambda$	häufig: Ordinalzahlen	
$\alpha + 1$	Nachfolgerordinalzahl der Ordinalzahl α; $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$	
$f\big\|_\alpha$	Die Funktion f eingeschränkt auf α	
$a_\alpha := a(\alpha)$	Eine transfinite Folge	1.5.10
$H(m)$	Die Hartogszahl der Menge m	1.6.5
κ	häufig: Kardinalzahl	
κ^+	Die Nachfolgerkardinalzahl von κ	1.6.6
$\bigsqcup A$	Die disjunkte Vereinigung der Mengen von A	2.1.1
$\sum \kappa_i$	Die Summe von Kardinalzahlen	2.4.1
$\prod \kappa_i$	Das Produkt von Kardinalzahlen	2.4.1
π_i	Die i-te kanonische Koordinaten- oder Projektionsabbildung	
$\pi_i(\mathcal{U})$	Der von $\mathcal{U}$ erzeugte Projektionsfilter	2.5.20
(X, τ)	Topologischer Raum über X mit Topologie τ	
$\mathfrak{F}(X)$	Die Menge aller Filter über der Grundmenge X	2.5.1
$\mathfrak{U}(x)$	Der von x erzeugte Punktfilter	
τ_x	Die Menge aller offenen Mengen, die x enthalten	2.5.11
$\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x$	Der Filter konvergiert in τ gegen x	2.5.11
$\mathcal{U}$	häufig: Ultrafilter	
$\prod_{i \in I_1} a_i \dot{\times} \prod_{i \in I_2} b_i$	Indexprodukt zweier Produktmengen	2.5.18
(K, E)	Graph mit Knoten K und Ecken E	2.6.1
$\mathcal{B}(G)$	Die Menge aller Teilgraphen von G, die Bäume sind	2.6.6
$\mathcal{S}(G)$	Die Menge aller Teilgraphen von G, die Spannbäume sind	2.6.6
$A \dot{\cup} B$	Die Vereinigung zweier disjunkter Mengen A und B	2.6.8
$\lim\limits_{i \in I}(x_i) = x$	Das Netz $(x_i) : i \in I$ konvergiert gegen x	2.7.6
$\sum_{s \in S} X_s$	Die unbedingte Summe des Netzes (X_s)	2.7.11
$l^\infty(S)$	Siehe 2.7.15	
$C_0(S)$	Siehe 2.7.15	
$l_1(S)$	Siehe 2.7.15	
$P_X N_s$	Der Ersetzungsraum	2.7.19
$\\|f\\|_E$	Norm von f im normierten Raum E	
E'	Der Dualraum des normierten Raumes E	
$A \overset{z}{\sim} B$	A ist Zerlegungsäquivalent zu B	3.1.2
$SO(3)$	Die Drehgruppe des $\mathbb{R}^3$	
$GL_3(\mathbb{R})$	Gruppe der 3×3 Matrizen	
σH	Die durch die Drehmatrix σ gedrehte Menge $H \subseteq \mathbb{R}^3$	
$\mathrm{sign}(x)$	Die Signumsfunktion auf $x \in \mathbb{R}$ angewandt	
$a \mid b$	a teilt b	
$a \nmid b$	a teilt nicht b	
IA, IV, IS	Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung, Induktionsschritt	
K^3	Volle Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$; $K^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \\|x\\| \leq 1\}$	
S^2	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$; $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \\|x\\| = 1\}$	
ε	Neutrales Element bezüglich einer Gruppenoperation	
$\mathcal{F}_f$	Der vom Filter $\mathcal{F}$ und der Abbildung f erzeugte Bildfilter	
$\lim\limits_{\mathcal{U}} f$	In einem kompakten Raum die Menge der Punkte, gegen die der Bildfilter $\mathcal{U}_f$ eines Ultrafilters $\mathcal{U}$ konvergiert	4.1.6
ℓ^∞	Raum der beschränkten Folgen des $\mathbb{R}$ mit Supremumsnorm	
$\sqcup, \sqcap$	Verbandsoperationen Supremums- und Infimumbildung	4.2.1

$(V, \leq), (V, \sqcup, \sqcap)$	Verband als Halbordnung bzw. algebraische Struktur aufgefasst	4.2.5
x'	Im Verbandskontext das Komplement von x	4.2.9
$^{B}/_{I}$	Der Quotient eines Ringes B oder einer booleschen Algebra mit Ideal I	
$[x]_I$	Ein Element eines mit I quotientierten Ringes mit Repräsentant x	
$\Sigma \models F$ $(\Sigma \not\models F)$	Die Formel F *folgt* (nicht) aus der Formelmenge Σ	4.3.2
$\Sigma \vdash F$ $(\Sigma \nvdash F)$	Die Formel F ist aus Σ (nicht) *ableitbar*	4.3.2
$Con(\Sigma)$	Die Formelmenge Σ ist konsistent	4.3.2

Literatur

[Bar15] René Bartsch. *Allgemeine Topologie*. 2., korr. und erw. Aufl. De Gruyter Studium. Berlin: De Gruyter, 2015. ISBN: 3110406179.

[Bea04] Richard Beals. *Analysis: An Introduction*. Cambridge, UK und New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN: 978-0-521-60047-7.

[Bee85] Michael J. Beeson. *Foundations of Constructive Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985. ISBN: 978-3-642-68954-3. DOI: `10.1007/978-3-642-68952-9`.

[Bri96] Egbert Brieskorn, Hrsg. *Felix Hausdorff zum Gedächtnis*. Braunschweig: Vieweg, 1996. ISBN: 3528064935.

[Can95] Georg Cantor. „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre". In: *Mathematische Annalen* 46.4 (1895), S. 481–512. ISSN: 0025-5831. DOI: `10.1007/BF02124929`.

[Day62] Mahlon Marsh Day. *Normed linear spaces /*. 2. Aufl. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin und Heidelberg [u.a.]: Springer, 1962.

[Day73] Mahlon M. Day. *Normed Linear Spaces*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1973. DOI: `10.1007/978-3-662-09000-8`.

[Dei04] O. Deiser. *Einführung in Die Mengenlehre: Die Mengenlehre Georg Cantors und Ihre Axiomatisierung Durch Ernst Zermelo*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2004. ISBN: 9783540204015.

[Die12] Reinhard Diestel. *Graph theory*. 4th ed., 2. corr. print. Bd. 173. Graduate Texts in Mathematics. Heidelberg: Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-14278-9.

[DR50] A. Dvoretzky und C. A. Rogers. „Absolute and Unconditional Convergence in Normed Linear Spaces". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36.3 (1950), S. 192–197. ISSN: 0027-8424. DOI: `10.1073/pnas.36.3.192`.

[FP13] U. Friedrichsdorf und A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*. Vieweg und Teubner Verlag, 2013. ISBN: 9783322898562. URL: `https://books.google.de/books?id=uyaeBgAAQBAJ`.

[Fra21] Adolf Fraenkel. „Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre". In: *Mathematische Annalen* 86.3-4 (1921), S. 230–237. ISSN: 0025-5831. DOI: `10.1007/BF01457986`.

[FW91] M. Foreman und F. Wehrung. „The Hahn-Banach Theorem implies the existence of a non-Lebesgue measurable set". In: *Fundamenta Mathematicae* (1991), S. 13–19.

[GKL08] E. Gyori, G.O.H. Katona und L. Lovász. *Horizons of Combinatorics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 9783540772002.

[Gre] Greg Muller. *The Axiom of Choice is Wrong*. URL: `https://cornellmath.wordpress.com/2007/09/13/the-axiom-of-choice-is-wrong/` (besucht am 23. 08. 2016).

[Hal64] J. D. Halpern. „The Independence of the Axiom of Choice from the Boolean Prime Ideal Theorem". In: *Fundamenta Mathematicae* 55 (1964), S. 57–66.

[HB02] Felix Hausdorff und Egbert Brieskorn, Hrsg. *Grundzüge der Mengenlehre*. Gesammelte Werke. Berlin: Springer, 2002. ISBN: 3-540-42224-2.

[Jec08] T. J. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Publications, 2008. ISBN: 9780486466248.

[Jec73] Thomas J. Jech. *The Axiom of Choice*. Bd. 75. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1973. ISBN: 0444104844.

[Jec78] Thomas J. Jech. *Set theory*. Bd. 79. Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks. New York: Academic Press, 1978. ISBN: 0-12-381950-4.

[JL 50] J.L. Kelley. „The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice.“ In: *Fundamenta Mathematicae* (1950), S. 75–78.

[JL 72] J.L. Bell and D.H. Fremlin. „A Geometric Form of the Axiom of Choice“. In: *Fundamenta Mathematicae* 77 (1972), S. 167–170.

[Mar05] Per Martin-Löf. „100 years of Zermelo's axiom of choice: What was the problem with it?“ In: *The Computer Journal* 49.3 (2005), S. 345–350. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/bxh162.

[Mata] Mathoverflow. *Krein Milman theorem without the axiom of choice*. URL: http://mathoverflow.net/questions/194442/krein-milman-theorem-without-the-axiom-of-choice (besucht am 23. 08. 2016).

[Matb] Mathoverflow. *Why worry about the axiom of choice?* URL: http://mathoverflow.net/questions/22927/why-worry-about-the-axiom-of-choice (besucht am 23. 08. 2016).

[Mon95] James Donald Monk, Hrsg. *Handbook of Boolean algebras*. 1. ed., 2. impr. Amsterdam: North-Holland, 1995. ISBN: 0-444-70261-X.

[Moo13] Gregory H. Moore. *Zermelo's axiom of choice: Its origins, development & influence*. Dover ed., 1. publ., republ. 1982. Dover books on mathematics. Mineola N.Y.: Dover Publ, 2013. ISBN: 978-0-48648841-7.

[Paw91] Janusz Pawlikowski. „The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox“. In: *Fundamenta Mathematicae* 138.1 (1991), S. 21–22.

[PD11] Alexander Prestel und Charles N. Delzell. *Mathematical logic and model theory: A brief introduction*. Universitext. London: Springer, 2011. ISBN: 978-1-4471-2175-6. DOI: 10.1007/978-1-4471-2176-3.

[Pin72] David Pincus. „Independence of the prime ideal theorem from the Hahn Banach theorem“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 78.5 (1972), S. 766–771. ISSN: 0002-9904. DOI: 10.1090/S0002-9904-1972-13025-8.

[PS77] David Pincus und Robert M. Solovay. „Definability of measures and ultrafilters“. In: *The Journal of Symbolic Logic* 42.02 (1977), S. 179–190. ISSN: 0022-4812. DOI: 10.2307/2272118.

[Rau02] Wolfgang Rautenberg. *Einführung in die Mathematische Logik*. 2., verbesserte und erweiterte Auflage. Wiesbaden und s.l.: Vieweg+Teubner Verlag, 2002. ISBN: 978-3-528-16754-7. DOI: 10.1007/978-3-322-91518-4.

[Rob84] Robert Bunn. „Review of: Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence. By Gregory H. Moore.“ In: *The American Mathematical Monthly* 91.10 (1984), S. 654–663. ISSN: 00029890.

[RR63] Herman Rubin und Jean E. Rubin, Hrsg. *Equivalents of the axiom of choice*. Bd. v. 34. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland, 1963. ISBN: 0444533990.

[S B23] S. Banach. „Sur le probleme de mesure“. In: *Fundamenta Mathematicae* 4 (1923), S. 7–33.

[Sch97] Eric Schechter. *Handbook of analysis and its foundations*. San Diego Calif. u.a.: Acad. Press, 1997. ISBN: 0-12-622760-8.

[ST24] St. Banach und A. Tarski. „Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes“. In: *Fundamenta Mathematicae* 6.1 (1924), S. 244–277.

[Sta] Stanford Enciclopedia of Philosophy. *Axiom of Choice*. URL: http://plato.stanford.edu/entries/axiom-choice/#IndConAxiCho (besucht am 23. 08. 2016).

[Sti02] John Stillwell. „The Continuum Problem“. In: *The American Mathematical Monthly* 109.3 (2002), S. 286. ISSN: 00029890. DOI: 10.2307/2695360.

[Ter14] John Terilla. *Tychonoff's Theorem*. 2014. URL: `http://qcpages.qc.cuny.edu/~jterilla/topology/notes3.pdf` (besucht am 23. 08. 2016).

[TW16] Grzegorz Tomkowicz und S. Wagon. *The Banach-Tarski paradox*. Second edition. Bd. 163. Encyclopedia of mathematics and its applications. New York, NY: Cambridge University Press, 2016. ISBN: 9781107042599.

[Wer05] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 5., erw. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2005. ISBN: 3540213813.

[Wika] Wikibooks. *Beweisarchiv: Topologie: Satz von Tychonoff*. URL: `https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Topologie:_Satz_von_Tychonoff` (besucht am 23. 08. 2016).

[Wikb] Wikipedia. *Banach-Tarski-Paradoxon*. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski-Paradoxon` (besucht am 11. 03. 2016).

[Wikc] Wikipedia. *Lemma von Zorn*. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Lemma_von_Zorn` (besucht am 23. 08. 2016).

[Wikd] Wikipedia. *Satz von Banach-Alaoglu*. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Banach-Alaoglu` (besucht am 11. 03. 2016).

[Win] Reinhard Winkler. *Wie macht man 2 aus 1?* URL: `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/bantar.pdf` (besucht am 04. 04. 2016).

[Zer07] E. Zermelo. „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung“. In: *Mathematische Annalen* 65.1 (1907), S. 107–128. ISSN: 0025-5831. DOI: `10.1007/BF01450054`.

[Zer08] E. Zermelo. „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I“. In: *Mathematische Annalen* 65.2 (1908), S. 261–281. ISSN: 0025-5831. DOI: `10.1007/BF01449999`.

Nachwort

Bereits Ende 2014 begann ich mich auf meine Diplomarbeit vorzubereiten, indem ich einen von Herrn Prof. Siegfried Gottwald gehaltenen Kurs namens „Fuzzylogik“ besuchte und das Skript in LaTeX aufbereitete und ergänzte, da ich vorhatte bei ihm eine Arbeit mit dem Titel „*Kardinalzahlen im Fuzzymengenkontext*“ zu schreiben. Dieses Vorhaben wurde im September 2015 traurigerweise durch Herrn Gottwalds überraschenden Tod vereitelt.
Als ich davon erfuhr war ich natürlich zuerst geschockt. Ein sehr hilfreiches Gespräch mit Herrn Steinacker, in dem er mir Anbot ihm bekannte Professoren, die eventuell mein Thema weiterführen könnten, zu vermitteln, brachte letztendlich die Erkenntnis, dass ich umsatteln musste, wenn ich nicht mindestens 500 Kilometer Entfernung zwischen mir und meinem Diplomvater in Kauf nehmen wollte. Noch am selben Tage ging ich niedergeschlagen auf direktem Wege zu Frau Prof. Eisner und fragte sie zwischen Tür und Angel rundheraus, ob sie ein Diplomthema für mich hätte. Sie besaß die umschweiflose Güte mir mit einem entschiedenen „Ich nehme Sie!“ den Tag zu retten - hier ist im Hinblick auf die vielen anderen Diplomanden Frau Eisners und der damit verbundenen Arbeit ein ganz besonderer Dank angebracht. Darüber hinaus war Frau Eisner immer mit sehr hilfreichen Anmerkungen und Ideen präsent und gab mir stets das äußerst angenehme Gefühl, dass es sich bei unserer Zusammenarbeit um eine Symbiose handelte, was keineswegs selbstverständlich ist. Ihrer Offenheit und Neugier ist es zu verdanken, dass ich überhaupt ein solches Thema bearbeiten durfte, das nicht zu ihren Kernforschungsthemen gehört. Kurzum gehörte das Schreiben dieser Diplomarbeit dank ihr zu den schönsten Erfahrungen meines gesamten Mathematikstudiums, wofür ich ihr hiermit herzlich danken möchte.

Großen Dank verdient auch Herr Prof. Kühn, der sich spontan bereiterklärt hat, die Zweitkorrektur dieser Diplomarbeit zu übernehmen und mit hilfreichen Anmerkungen und angenehmen Gesprächen zur Stelle war.

Keinesfalls unerwähnt bleiben darf Dr. habil. Agnes Radl, die mit ihrer Idee zum Auswahlaxiom die Grundlage für diese Diplomarbeit gelegt hat, wofür ich ihr, neben der guten Zusammenarbeit in all den Jahren, auch herzlich danken möchte.

Ein Dank geht auch an Herrn Prof. Kirchheim, der für ein sehr interessantes und hilfreiches Gespräch meine Arbeit betreffend zur Verfügung stand.

Auch möchte ich Herrn Dr. habil. Peter Steinacker danken, der mir bereits in den Anfängen meines Mathestudiums die Schönheiten der Logik gezeigt hat und ohne den ich vermutlich keine logisch angehauchte Arbeit dieser Art geschrieben hätte. Neben stets sehr guten Gesprächen verdanke ich ihm auch sehr hilfreiche Anmerkungen zu Kapitel 4 und insbesondere zu dem Logikteil in Abschnitt 4.3.

Ein Dank geht auch an alle, die meine Diplomarbeit Korrektur gelesen haben, darunter Tobias Hertel und Christoph Schulze, denen beiden ich auch abseits der Mathematik zu freundschaftlichem Dank verpflichtet bin.

Ohne meinen sehr engagierten und (nicht nur fachlich) klugen Mathelehrer Herrn Uwe Herrmann hätte es mich mit Sicherheit auch nicht in diese Richtung verschlagen; wie gut, dass es solche wie ihn gibt.

Meinen lieben Eltern gebührt zweifelsohne ein ganz besonderer Dank, haben sie mir doch erst alles ermöglicht. Keine Worte könnten meinem Gefühl der Dankbarkeit gerecht werden. Ohne ihre geduldige Unterstützung wäre sowohl mein an positiven Erfahrungen reiches Auslandsstudienjahr in Pisa als auch die ganze schöne Zeit in Leipzig nicht möglich gewesen.

Weiterhin möchte ich auch meinen lieben Schwestern und Großeltern danken, haben auch sie mich stets unterstützend begleitet. Meinem lieben Opa Viktor habe ich sicherlich auch ein Stück weit meine Begeisterung für die Mathematik und Logik zu verdanken; er wäre ohne Frage stolz und sicher auch überrascht, gebärdete ich mich doch als Kind recht immun seinen Versuchen gegenüber, mir die Mathematik schmackhaft zu machen.

Zu guter Letzt möchte ich natürlich auch meiner teuren Ilaria, die mir in allen Aspekten meines Lebens stets lieb und treu zur Seite steht, für alles danken.

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe; insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort	Datum	Unterschrift